



ORIGINAL RESEARCH PAPER

The Role of Cognitive Feedback in Correcting Students' Conceptual Misconceptions During Error-Based Learning: A Study in Teaching Derivatives

Parvaneh Jami^{*1}¹ General Department of Education.

ABSTRACT

Keywords

Cognitive Feedback
Conceptual Misconceptions
Derivatives
Error-Based Learning
Mathematics Education
Reflection on Thinking
Processes

1. Corresponding author
✉ p.jami@iau.ac.ir

Received: 2026/06/19

Reviewed: 2026/08/04

Accepted: 2026/08/26

Background and Objectives: In contemporary mathematics education, errors are no longer regarded merely as indicators of learners' weaknesses. Instead, they can provide opportunities for identifying students' ways of thinking and correcting misconceptions. Cognitive feedback helps students reconsider their reasoning and strategies, thereby facilitating conceptual change. This study aimed to examine the role of cognitive feedback in correcting students' conceptual misconceptions within error-based learning in the teaching of derivatives. **Methods:** This descriptive-analytical study was conducted as an instructional intervention involving 57 twelfth-grade science students. The intervention was implemented over four 70-minute sessions during a two-week period. Instructional activities focused on the analysis of erroneous responses, comparison of problem-solving strategies, and the provision of cognitive feedback. Data were collected through three instructional tests, analysis of students' responses, and identification of recurring error patterns. **Findings:** The findings indicated that many student errors in learning derivatives were rooted in conceptual misconceptions and the algorithmic use of differentiation rules. The most frequent errors were associated with continuity and differentiability, piecewise-defined functions, absolute value functions, the chain rule, and distinguishing between a zero derivative and a vertical tangent. Comparison of pre-test and post-test results revealed substantial reductions in the frequency of errors across all investigated categories. **Conclusion:** The findings suggest that cognitive feedback in an error-based learning environment can guide students toward analyzing their reasoning, reconsidering their thinking processes, and correcting conceptual misconceptions. Therefore, instructional activities based on error analysis and cognitive feedback may enhance students' conceptual learning of derivatives.

ISSN (Online): 2783- 4379

DOI: [10.48310/rme.2026.23375.1153](https://doi.org/10.48310/rme.2026.23375.1153)

Citation (APA): Jami, P. (2026). The Role of Cognitive Feedback in Correcting Students' Conceptual Misconceptions During Error-Based Learning: A Study in Teaching Derivatives. *Research in Mathematics Education*, 6 (2), 33- 48 .

 <https://doi.org/10.48310/rme.2026.23375.1153>



نقش بازخورد شناختی در اصلاح بدفهمی‌های مفهومی دانش‌آموزان در یادگیری مبتنی بر خطا: مطالعه‌ای در آموزش مشتق

مقاله پژوهشی / مروری

پروانه جامی^{۱،*}

۱ اداره کل آموزش و پرورش استان البرز.

چکیده

پیشینه و اهداف: در رویکردهای نوین آموزش ریاضیات، خطا تنها نشانه ضعف یادگیرنده نیست، بلکه می‌تواند فرصتی برای شناسایی شیوه‌های تفکر و اصلاح برداشت‌های نادرست دانش‌آموزان فراهم کند. بازخورد شناختی با جلب توجه دانش‌آموزان به استدلال‌ها و راهبردهای مورد استفاده، زمینه بازنگری در تفکر و اصلاح بدفهمی‌های مفهومی را فراهم می‌کند. پژوهش حاضر با هدف بررسی نقش بازخورد شناختی در اصلاح بدفهمی‌های مفهومی دانش‌آموزان در یادگیری مبتنی بر خطا و آموزش مبحث مشتق انجام شد. **روش‌ها:** این پژوهش با رویکرد توصیفی - تحلیلی و در قالب یک مداخله آموزشی در سه کلاس پایه دوازدهم رشته علوم تجربی با مشارکت ۵۷ دانش‌آموز انجام شد. برنامه آموزشی طی چهار جلسه ۷۰ دقیقه‌ای در مدت دو هفته اجرا گردید. فعالیت‌ها بر تحلیل پاسخ‌های خطا، مقایسه راهبردهای حل مسئله و ارائه بازخوردهای شناختی متمرکز بود. داده‌ها از طریق آزمون‌های آموزشی، تحلیل پاسخ‌ها و بررسی الگوهای خطا گردآوری شد. **یافته‌ها:** نتایج نشان داد بخش قابل توجهی از خطاهای دانش‌آموزان در مبحث مشتق ریشه در بدفهمی‌های مفهومی و کاربرد الگوریتمی قواعد مشتق‌گیری دارد. بیشترین خطاها در موضوعات پیوستگی و مشتق‌پذیری، توابع چندضابطه‌ای، توابع قدرمطلق، قاعده زنجیره‌ای و تمایز میان مشتق صفر و مماس قائم مشاهده شد. همچنین فراوانی خطاها پس از اجرای فعالیت‌های آموزشی در تمامی محورهای مورد بررسی کاهش یافت. **نتیجه‌گیری:** یافته‌های پژوهش نشان می‌دهد به کارگیری بازخورد شناختی در یادگیری مبتنی بر خطا می‌تواند به اصلاح بدفهمی‌های مفهومی و تقویت یادگیری مفهومی دانش‌آموزان در آموزش مشتق کمک کند.

از دستگاه خود برای اسکن و خواندن مقاله به صورت آنلاین استفاده کنید.

واژه‌های کلیدی

آموزش ریاضی
بازخورد شناختی
بازنگری فرایندهای ذهنی
بدفهمی‌های مفهومی
مشتق
یادگیری مبتنی بر خطا

۱. نویسنده مسئول

p.jami@iau.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۵/۰۳/۲۹

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۵/۰۵/۱۳

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۶/۰۴

شماره صفحات: ۴۸ - ۳۳

DOI: [10.48310/rme.2026.23375.1153](https://doi.org/10.48310/rme.2026.23375.1153)

شاپا الکترونیکی: ۴۳۷۹ - ۲۷۸۳

OPYRIGHTS



©2026 The author(s). This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, as long as the original authors and source are cited. No permission is required from the authors or the publishers.

۱. مقدمه

آموزش ریاضیات فراتر از انتقال قواعد و مهارت های محاسباتی است و نقش مهمی در پرورش استدلال، حل مسئله و شکل گیری درک مفهومی دانش آموزان دارد. با این حال، تجربه های آموزشی و یافته های پژوهشی نشان می دهد بسیاری از دانش آموزان در فرایند یادگیری مفاهیم ریاضی با مشکلاتی مواجه می شوند که در قالب بدفهمی های مفهومی و الگوهای تکرارشونده خطا بروز می یابد. این اشتباهات صرفاً حاصل ناتوانی در انجام محاسبات نیستند، بلکه می توانند بازتابی از شیوه تفکر، استدلال و سازمان دهی دانش ریاضی در ذهن دانش آموزان باشند (Borasi, 1994).

در سال های اخیر، نگاه به خطا در آموزش ریاضیات دستخوش تحول شده است. در رویکردهای نوین، خطا نه به عنوان نشانه شکست در یادگیری، بلکه به منزله فرصتی برای شناخت فرایندهای ذهنی دانش آموزان و بهبود یادگیری تلقی می شود. بر این اساس، تحلیل پاسخ های نادرست می تواند زمینه شناسایی موانع یادگیری و اصلاح برداشتهای نادرست را فراهم آورد. پژوهش ها نشان داده اند که مواجهه فعال یادگیرندگان با اشتباهات و بررسی علل شکل گیری آن ها، در مقایسه با تأکید صرف بر پاسخ صحیح، به یادگیری عمیق و مفهومی تر و مشارکت شناختی بیشتر منجر می شود (Boaler, 2016؛ Boomgaarden & Loibl, 2024). در کنار تحلیل خطا، بازخورد شناختی نیز از عوامل مؤثر در هدایت یادگیری به شمار می رود. بازخورد شناختی فراتر از اعلام درستی یا نادرستی پاسخ عمل می کند و می کوشد توجه دانش آموز را به شیوه تفکر، استدلال ها و راهبردهای مورد استفاده در حل مسئله معطوف سازد. در چنین شرایطی، یادگیرنده فرصت می یابد درباره استدلال های خود تأمل کند، برداشتهای پیشین را مورد بازنگری قرار دهد و در صورت لزوم آن ها را اصلاح نماید.

پژوهش های متعدد نشان داده اند که بازخوردهای شناختی و تکوینی می توانند نقش مهمی در تقویت یادگیری خودتنظیمی، ارتقای عملکرد تحصیلی و بهبود درک مفهومی دانش آموزان ایفا کنند (Hattie & Timperley, 2007؛ Söderström & Palm, 2024؛ Nicol & Macfarlane-Dick, 2006). مبحث مشتق یکی از موضوعات بنیادین و در عین حال چالش برانگیز آموزش ریاضی در دوره متوسطه دوم محسوب می شود.

پژوهش ها نشان داده اند که بسیاری از دانش آموزان، علی رغم توانایی نسبی در اجرای قواعد مشتق گیری، در درک مفاهیمی همچون شیب خط مماس، ارتباط پیوستگی و مشتق پذیری، تفسیر هندسی مشتق و تحلیل رفتار توابع با مشکلاتی مواجه اند (Orton, 1983؛ Tall & Vinner, 1981؛ Zandieh, 2000).

همچنین نتایج برخی پژوهش های داخلی بیانگر آن است که بدفهمی های مفهومی در موضوعاتی مانند شیب، مجموعه ها و سایر مفاهیم بنیادین ریاضی، نقشی اساسی در شکل گیری خطاهای یادگیری دانش آموزان دارند (عزتی و همکاران، ۱۴۰۳؛ پارسی نیا و همکاران، ۱۴۰۰). با وجود گسترش پژوهش های مرتبط با خطاهای یادگیری، بدفهمی های مفهومی و نقش بازخورد در آموزش ریاضیات، همچنان شواهد محدودی درباره چگونگی بهره گیری از بازخورد شناختی برای اصلاح بدفهمی های مفهومی دانش آموزان در مبحث مشتق وجود دارد. بیشتر مطالعات پیشین یا بر شناسایی خطاها و بدفهمی ها تمرکز داشته اند یا اثر کلی بازخورد را بررسی کرده اند و کمتر به فرایند اصلاح تدریجی بدفهمی های مفهومی در بستر یادگیری مبتنی بر خطا پرداخته اند. از این رو، پژوهش حاضر با هدف بررسی نقش بازخورد شناختی در اصلاح بدفهمی های مفهومی دانش آموزان در یادگیری بر مبنای خطا در آموزش مبحث مشتق انجام شد. تمرکز پژوهش بر شناسایی الگوهای خطا، تحلیل بدفهمی های مفهومی و بررسی ظرفیت بازخورد شناختی در بهبود درک مفهومی دانش آموزان از مشتق است.

۲. پیشینه پژوهش

۲-۱. یادگیری مبتنی بر خطا

یادگیری بر مبنای خطا بر این فرض استوار است که اشتباه دانش آموزان می توانند به عنوان منبعی ارزشمند برای آموزش مورد استفاده قرار گیرند. در این رویکرد، توجه اصلی از صرف تشخیص پاسخ درست یا نادرست به بررسی فرایندهای

فکری منجر به پاسخ معطوف می‌شود. از این منظر، خطا نه مانعی در مسیر یادگیری، بلکه بخشی از فرایند شکل‌گیری، بازسازی و اصلاح دانش تلقی می‌شود (Borasi, 1994). در چنین رویکردی، دانش‌آموز با تحلیل پاسخ‌های خود و پاسخ‌های نادرست دیگران فرصت می‌یابد برداشت‌های نادرست، تعمیم‌های ناموجه و نواقص استدلالی را شناسایی کند. این فرایند موجب می‌شود یادگیری از سطح اجرای صرف قواعد و الگوریتم‌ها فراتر رفته و به فهم روابط و مفاهیم زیربنایی نزدیک‌تر شود. بوالر (Boaler, 2016) معتقد است کلاس‌هایی که در آن‌ها خطا به‌عنوان بخشی طبیعی از یادگیری پذیرفته می‌شود، زمینه مناسب‌تری برای مشارکت فکری دانش‌آموزان و شکل‌گیری نگرش مثبت نسبت به یادگیری فراهم می‌کنند. در چنین محیطی، دانش‌آموزان با اطمینان بیشتری ایده‌های خود را مطرح کرده و آمادگی بیشتری برای بررسی، ارزیابی و اصلاح آن‌ها دارند. پژوهش‌های اخیر نیز نشان داده‌اند که یادگیری از خطا زمانی اثربخش‌تر است که دانش‌آموزان فرصت تحلیل اشتباهات، مقایسه راه‌حل‌ها و بازنگری در استدلال‌های خود را داشته باشند. بومگاردن و لوبیل (Boomgaarden & Loibl, 2024) یادگیری از خطا را فرایندی می‌دانند که طی آن اشتباهات به فرصت‌هایی برای بازسازی دانش و تعمیق فهم مفهومی تبدیل می‌شوند. همچنین هوت، لاراین و کایزر (Hoth et al., 2022) تأکید می‌کنند که شناسایی و تحلیل خطاهای دانش‌آموزان می‌تواند مبنایی برای طراحی مداخلات آموزشی مؤثر و توسعه درک مفهومی آنان باشد. در آموزش ریاضیات، به‌ویژه در مباحثی که مفاهیم انتزاعی و چندلایه دارند، تحلیل اشتباهات می‌تواند اطلاعات ارزشمندی درباره شیوه تفکر دانش‌آموزان فراهم آورد. در مبحث مشتق نیز بسیاری از مشکلات یادگیری تنها از طریق مشاهده پاسخ نهایی قابل شناسایی نیست و بررسی استدلال‌ها و شیوه مواجهه دانش‌آموزان با مفاهیم ریاضی اهمیت ویژه‌ای دارد.

از این رو، تحلیل خطاها می‌تواند به شناسایی بدفهمی‌های مفهومی و طراحی فعالیت‌های آموزشی هدفمند کمک کند. در چنین شرایطی، خطا به فرصتی برای توسعه درک و فهم، بازسازی دانش پیشین و اصلاح برداشت‌های نادرست تبدیل می‌شود.

۲-۲. بازخورد شناختی و بازنگری در فرایندهای ذهنی

انسان در بسیاری از فعالیت‌های روزمره و موقعیت‌های یادگیری، عملکرد خود را از طریق چرخه‌های بازخورد تنظیم می‌کند. در این فرایند، فرد پس از انجام یک عمل، اطلاعاتی درباره نتایج آن دریافت کرده و بر اساس این اطلاعات، رفتار یا شیوه عمل خود را اصلاح، تعدیل یا تقویت می‌کند. به بیان دیگر، بازخورد میان وضعیت موجود و وضعیت مطلوب ارتباط برقرار کرده و امکان تغییر آگاهانه عملکرد را فراهم می‌سازد. از دیدگاه روان‌شناسی تربیتی، بازخورد زمانی بیشترین اثربخشی را دارد که علاوه بر نتیجه، بر فرایند یادگیری و شیوه تفکر یادگیرنده نیز متمرکز باشد (سیف، ۱۳۹۸). حتی و تیمپرلی (Hattie & Timperley, 2007) بازخورد را یکی از مؤثرترین عوامل بهبود یادگیری می‌دانند و معتقدند بازخورد زمانی بیشترین تأثیر را دارد که به یادگیرنده کمک کند فاصله میان عملکرد فعلی و عملکرد مطلوب را تشخیص دهد و توجه او را از صرف پاسخ نهایی به کیفیت استدلال، راهبردهای حل مسئله و نحوه تفکر معطوف سازد. در چنین شرایطی، دانش‌آموز فرصت می‌یابد استدلال‌های خود را بازبینی کرده، خطاهای احتمالی را شناسایی کند و برای حل مسائل از راهبردهای مؤثرتری بهره‌گیرد.

پژوهش‌ها نشان داده‌اند بازخوردهایی که یادگیرنده را به ارزیابی عملکرد خود و بازبینی راهبردهای یادگیری سوق می‌دهند، نقش مهمی در توسعه یادگیری دارند (Clark, 2012؛ Nicol & Macfarlane-Dick, 2006). در همین راستا، یادگیری خودتنظیم شده بر نقش فعال دانش‌آموز در پایش، ارزیابی و اصلاح فرایندهای شناختی تأکید دارد و نتایج پژوهش‌ها نشان می‌دهد توانایی خودنظارتی و تنظیم راهبردهای یادگیری با پیشرفت تحصیلی رابطه مثبت دارد (Zimmerman, 2002؛ Zheng et al., 2023). پانادرو و همکاران (Panadero et al., 2023) نیز نشان داده‌اند که بازخوردهای فرایندمحور می‌توانند از طریق تقویت خودارزیابی و خودنظارتی، کیفیت یادگیری و عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان را ارتقا دهند.

افزون بر این، پژوهش‌ها نشان داده‌اند که کیفیت، زمان‌بندی و جهت‌گیری بازخورد می‌تواند بر فرایندهای شناختی، فراشناختی و خودتنظیمی یادگیرندگان تأثیر معناداری داشته باشد (Panadero et al., 2023). در حوزه آموزش ریاضی، بازخورد شناختی می‌تواند توجه دانش‌آموز را به کیفیت استدلال‌ها، نحوه تحلیل مسائل و چگونگی استفاده از مفاهیم ریاضی معطوف سازد و زمینه بازنگری در فرایندهای ذهنی او را فراهم آورد. سودرستروم و پالم (Söderström & Palm, 2024) در مرور نظام‌مند پژوهش‌های آموزش ریاضی نشان دادند که بازخوردهای متمرکز بر تحلیل استدلال و بررسی خطاها، در مقایسه با بازخوردهای صرفاً نتیجه‌محور، تأثیر بیشتری بر فهم مفهومی دانش‌آموزان دارند. همچنین یافته‌های برخی پژوهش‌های داخلی نشان می‌دهد که عوامل شناختی و انگیزشی می‌توانند بر کیفیت یادگیری ریاضی اثرگذار باشند (فیروزیان و فیروزیان، ۱۴۰۳). این نتایج اهمیت بهره‌گیری از بازخورد شناختی و فراهم کردن فرصت‌هایی برای بازاندیشی در شیوه تفکر را در آموزش ریاضی برجسته می‌سازد.

۲-۳. بدفهمی‌های مفهومی در آموزش مشتق و پژوهش‌های مرتبط

مبحث مشتق یکی از بنیادی‌ترین موضوعات آموزش ریاضی در دوره متوسطه دوم است و درک آن نقش مهمی در فهم مفاهیمی مانند تغییر، نرخ تغییر و رفتار توابع دارد. با وجود این، تجربه‌های آموزشی و نتایج پژوهش‌ها نشان می‌دهد بسیاری از دانش‌آموزان در یادگیری این مبحث با بدفهمی‌های مفهومی مواجه هستند. این بدفهمی‌ها صرفاً ناشی از ضعف محاسباتی نیستند، بلکه به درک ناقص مفاهیم پایه، ضعف در تجسم هندسی و ناتوانی در به کارگیری صحیح مفاهیم و قواعد ریاضی مربوط می‌شوند. بخش قابل توجهی از دانش‌آموزان اگرچه قادر به استفاده از فرمول‌های مشتق‌گیری هستند، اما در تفسیر مفهومی نتایج، تحلیل رفتار تابع و برقراری ارتباط میان نمایش‌های جبری و هندسی مشتق با مشکلاتی مواجه می‌شوند. این مسئله با تمایز میان درک مفهومی و درک ابزاری در یادگیری ریاضیات همخوانی دارد؛ به گونه‌ای که دانش‌آموز ممکن است روش انجام یک فرایند را بداند، اما درک عمیقی از چرایی آن نداشته باشد (Skemp, 1976).

از سوی دیگر، تفاوت میان تصویر ذهنی دانش‌آموز از یک مفهوم ریاضی و تعریف رسمی آن می‌تواند زمینه شکل‌گیری برداشت‌های نادرست و خطاهای پایدار را فراهم سازد (Tall & Vinner, 1981). پژوهش‌های انجام‌شده در حوزه آموزش مشتق نیز این مشکلات را تأیید کرده‌اند. اورتن (Orton, 1983) نشان داد بسیاری از دانش‌آموزان در درک مفاهیم بنیادی مشتق و ارتباط میان جنبه‌های محاسباتی و مفهومی آن با مشکل مواجه هستند. همچنین زندیه (Zandieh, 2000) بیان می‌کند که فهم مفهوم مشتق مستلزم هماهنگی میان نمایش‌های جبری، هندسی و مفهومی است و ضعف در هر یک از این ابعاد می‌تواند به شکل‌گیری بدفهمی‌های پایدار منجر شود. در مبحث مشتق، این بدفهمی‌ها در قالب برداشت‌های نادرست از مفاهیمی همچون شیب خط مماس، مشتق‌پذیری، پیوستگی، قاعده زنجیره‌ای، توابع چندضابطه‌ای و توابع قدرمطلق مشاهده می‌شود. در بسیاری از موارد، دانش‌آموزان بدون درک ارتباط میان جنبه‌های جبری و هندسی مفهوم مشتق، صرفاً به اجرای مراحل محاسباتی می‌پردازند و در تفسیر نتایج و تحلیل رفتار توابع با مشکل مواجه می‌شوند. پژوهش‌های داخلی نیز بر گستردگی بدفهمی‌های مفهومی در آموزش ریاضی تأکید دارند. عزتی و همکاران (۱۴۰۳) نشان دادند بسیاری از خطاهای یادگیری در مفهوم شیب ناشی از درک نادرست مفاهیم پایه و ناتوانی در برقراری ارتباط میان نمایش‌های مختلف ریاضی است. همچنین پارسی‌نیا و همکاران (۱۴۰۰) گزارش کردند که بخش مهمی از خطاهای دانش‌آموزان در مبحث مجموعه‌ها ریشه در برداشت‌های مفهومی نادرست دارد و صرف آموزش الگوریتم‌ها و قواعد محاسباتی برای رفع آن‌ها کافی نیست.

در مجموع، یافته‌های پژوهشی نشان می‌دهد بدفهمی‌های مفهومی در آموزش مشتق ماهیتی پایدار و چندبعدی دارند و صرف آموزش الگوریتم‌های محاسباتی قادر به رفع آن‌ها نیست. از این رو، شناسایی الگوهای خطا و تحلیل بدفهمی‌های مفهومی می‌تواند زمینه طراحی مداخلات آموزشی مؤثر و فراهم‌سازی فرصت‌هایی برای بازنگری در شیوه تفکر و استدلال دانش‌آموزان را فراهم آورد.

۳. روش پژوهش

پژوهش حاضر با رویکرد توصیفی - تحلیلی و در قالب یک مداخله آموزشی کلاس محور، با هدف بررسی نقش بازخورد شناختی در اصلاح بدفهمی‌های مفهومی دانش‌آموزان طی یادگیری مبتنی بر خطا در مبحث مشتق انجام شد. مشارکت‌کنندگان پژوهش ۵۷ دانش‌آموز دختر پایه دوازدهم رشته علوم تجربی در سه کلاس درس یکی از مدارس بودند. نمونه‌گیری به شیوه در دسترس و در بستر کلاس‌های محل تدریس پژوهشگر انجام شد. فعالیت‌های آموزشی طی چهار جلسه ۷۰ دقیقه‌ای و در مدت دو هفته اجرا گردید.

در مرحله نخست، پاسخ‌های دانش‌آموزان در آزمون‌ها، تمرین‌های کلاسی و فعالیت‌های آموزشی بررسی شد و الگوهای پرتکرار خطا و بدفهمی‌های مفهومی در مبحث مشتق شناسایی و دسته‌بندی گردید. بر اساس نتایج این مرحله، مجموعه‌ای از آزمون‌ها و فعالیت‌های آموزشی مبتنی بر تحلیل خطا طراحی شد. سؤال‌ها عمدتاً در قالب چهارگزینه‌ای بودند و گزینه‌های نادرست بر پایه خطاها و بدفهمی‌های واقعی مشاهده‌شده در پاسخ‌های دانش‌آموزان تدوین شدند. در این فعالیت‌ها، دانش‌آموزان علاوه بر انتخاب پاسخ صحیح، موظف بودند علت نادرستی سایر گزینه‌ها را نیز تحلیل و تبیین کنند. این شیوه امکان شناسایی فرایندهای استدلالی، بازنگری در راهبردهای حل مسئله و تشخیص دقیق‌تر بدفهمی‌ها را فراهم می‌کرد.

در طول اجرای پژوهش، بازخوردهای شناختی با تأکید بر تحلیل استدلال‌ها، بررسی منشأ خطاها و هدایت دانش‌آموزان به بازاندیشی در شیوه تفکر و حل مسئله ارائه شد. تمرکز پژوهش بر خطاهایی بود که علاوه بر جنبه محاسباتی، ریشه در بدفهمی‌های مفهومی دانش‌آموزان داشتند. از جمله مهم‌ترین محورهای مورد بررسی می‌توان به قاعده زنجیره‌ای، ارتباط پیوستگی و مشتق‌پذیری، تمایز میان مشتق صفر و مماس قائم، توابع قدرمطلق و توابع چندضابطه‌ای اشاره کرد.

گردآوری داده‌ها از طریق مشاهده عملکرد دانش‌آموزان، تحلیل پاسخ‌های کتبی، نتایج سه آزمون آموزشی و ثبت الگوهای پرتکرار خطا انجام شد. تحلیل داده‌ها به شیوه توصیفی صورت گرفت. بدین منظور، فراوانی خطاهای شناسایی‌شده در آزمون‌های اولیه و پایانی مقایسه گردید و تغییرات مشاهده‌شده در کنار شواهد حاصل از مشارکت دانش‌آموزان در بحث‌های کلاسی، تحلیل پاسخ‌های نادرست و بازنگری در استدلال‌های ریاضی مورد بررسی قرار گرفت. در تحلیل یافته‌ها، توجه اصلی بر چگونگی تأثیر بازخوردهای شناختی در شناسایی و اصلاح بدفهمی‌های مفهومی و بهبود کیفیت استدلال‌های ریاضی دانش‌آموزان متمرکز بود.

۳-۱. فرایند طراحی ابزار و اجرای مداخله آموزشی

به‌منظور طراحی فعالیت‌های آموزشی و ابزارهای پژوهش، ابتدا بدفهمی‌های مفهومی و خطاهای رایج دانش‌آموزان در مبحث مشتق شناسایی شد. این فرایند بر پایه تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان طی سال‌های تدریس پژوهشگر، بررسی الگوهای پرتکرار خطا در کلاس‌های درس ریاضی انجام گرفت. بر اساس نتایج این مرحله، فهرستی از مهم‌ترین بدفهمی‌های مفهومی و خطاهای الگوریتمی دانش‌آموزان تدوین شد و مبنای طراحی فعالیت‌های آموزشی و سه آزمون پژوهش قرار گرفت.

سه آزمون آموزشی پژوهش، هر یک شامل پنج سؤال چهارگزینه‌ای بودند. سؤال‌ها به‌گونه‌ای طراحی شدند که هر سؤال دارای یک گزینه صحیح و سه گزینه نادرست بود، اما گزینه‌های نادرست به صورت تصادفی انتخاب نشده بودند. هر یک از این گزینه‌ها نمایانگر یکی از بدفهمی‌های مفهومی یا خطاهای رایج دانش‌آموزان در مبحث مشتق بود که در مرحله طراحی ابزار شناسایی شده بود. از این رو، انتخاب هر گزینه نادرست می‌توانست بیانگر وجود یک بدفهمی مشخص در ساختار مفهومی دانش‌آموز باشد. برخلاف آزمون‌های متداول که گزینه‌های نادرست صرفاً نقش انحرافی دارند، در این پژوهش گزینه‌های نادرست به‌صورت هدفمند و بر پایه بدفهمی‌های واقعی دانش‌آموزان طراحی شدند؛

بنابراین تحلیل انتخاب هر گزینه، اطلاعاتی درباره نوع بدفهمی دانش آموز و روند اصلاح آن در طول مداخله آموزشی فراهم می‌کند.

مداخله آموزشی طی چهار جلسه ۷۰ دقیقه‌ای و در مدت دو هفته اجرا شد. در جلسه نخست، مفاهیم پایه مشتق، تعریف مشتق، معادله خط مماس، ارتباط مشتق با شیب خط مماس و تفسیر رفتار نمودار تابع تدریس شد تا دانش‌آموزان با مفاهیم بنیادی مورد نیاز برای ادامه فعالیت‌ها آشنا شوند. در جلسه دوم، مباحث مربوط به پیوستگی و مشتق‌پذیری تدریس شد و بر تمایز میان این دو مفهوم تأکید گردید. در جریان تدریس، با ارائه مثال‌ها و مثال‌های نقض، نشان داده شد که اگرچه مشتق‌پذیری مستلزم پیوستگی تابع است، اما هر تابع پیوسته الزاماً مشتق‌پذیر نیست. در پایان این جلسه، نخستین آزمون آموزشی شامل پنج سؤال چهارگزینه‌ای برگزار شد که دانش‌آموزان ۱۵ دقیقه برای پاسخ‌گویی به آن فرصت داشتند. دانش‌آموزان علاوه بر انتخاب گزینه صحیح، موظف بودند دلیل نادرستی سایر گزینه‌ها را نیز بیان کنند. از آنجا که هر گزینه نادرست بیانگر یک بدفهمی رایج بود، تحلیل دلایل دانش‌آموزان امکان شناسایی دقیق‌تر شیوه استدلال و برداشت‌های مفهومی آنان را فراهم می‌کرد. پس از تصحیح آزمون، پاسخ‌های صحیح، تحلیل گزینه‌ها، نمرات و برگه‌های تصحیح‌شده در اختیار دانش‌آموزان قرار گرفت تا با مقایسه پاسخ خود با پاسخ صحیح، منشأ خطاهایشان را شناسایی کرده و در استدلال‌های خود بازنگری کنند. در جلسه سوم، مباحث مربوط به تابع مشتق و مشتق تابع مرکب و مشتق دوم تدریس شد. در پایان جلسه، آزمون دوم با مدت زمان ۱۵ دقیقه برگزار شد که شامل دو سؤال از مباحث جلسه قبل، با هدف بررسی میزان اصلاح بدفهمی‌های شناسایی‌شده، و سه سؤال از مطالب جدید بود. همانند مرحله قبل، پس از تصحیح آزمون، پاسخ صحیح، تحلیل گزینه‌ها، نمرات و بازخوردهای شناختی در اختیار دانش‌آموزان قرار گرفت تا فرصت ارزیابی مجدد استدلال‌ها و اصلاح برداشت‌های مفهومی خود را داشته باشند. در جلسه چهارم، مبحث مشتق‌پذیری روی یک بازه تدریس شد و در پایان جلسه چهارم نیز آزمون سوم با مدت زمان ۱۵ دقیقه برگزار شد که شامل دو سؤال از مباحث پیشین و سه سؤال از مبحث جدید بود. مقایسه پاسخ‌های دانش‌آموزان در سه مرحله آزمون، امکان بررسی روند تغییر بدفهمی‌های مفهومی، کاهش فراوانی خطاها و تحول در کیفیت استدلال‌های ریاضی آنان را فراهم ساخت.

در تمامی مراحل پژوهش، بازخورد شناختی صرفاً به اعلام درستی یا نادرستی پاسخ‌ها محدود نبود، بلکه از طریق تحلیل منشأ خطاها، بررسی استدلال‌های مختلف، مقایسه پاسخ‌های صحیح و نادرست و ارائه توضیح درباره علت نادرستی هر گزینه، دانش‌آموزان به بازاندیشی در شیوه تفکر خود هدایت می‌شدند. در مواردی که دانش‌آموز یکی از گزینه‌های مبتنی بر بدفهمی را انتخاب می‌کرد، مشاهده پاسخ صحیح، دریافت برگه تصحیح‌شده، اطلاع از نمره و مطالعه تحلیل گزینه‌ها، فرصت شناسایی و اصلاح بدفهمی را برای او فراهم می‌کرد. همچنین دانش‌آموزانی که گزینه صحیح را انتخاب کرده بودند، با تبیین دلیل نادرستی سایر گزینه‌ها، برداشت‌های نادرست رایج را تحلیل و رد می‌کردند. بدین ترتیب، آزمون‌ها علاوه بر نقش ارزشیابی، به‌عنوان بخشی از فرایند یادگیری مبتنی بر خطا و ارائه بازخورد شناختی عمل کردند و زمینه اصلاح تدریجی بدفهمی‌های مفهومی و تقویت استدلال‌های ریاضی دانش‌آموزان را فراهم ساختند.



شکل ۱: فرایند اجرای فعالیت‌های آموزشی مبتنی بر تحلیل خطا و بازخورد شناختی

همان‌گونه که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، اجرای مداخله آموزشی به‌صورت مرحله‌ای انجام شد. در هر جلسه پس از تدریس مفاهیم جدید، آزمون کوتاهی مبتنی بر خطا اجرا شد. پاسخ‌های دانش‌آموزان تحلیل گردید و بازخورد شناختی شامل پاسخ صحیح، تحلیل گزینه‌های نادرست و اطلاع‌رسانی درباره عملکرد آنان پیش از جلسه بعد در اختیارشان قرار گرفت. این چرخه در طول سه مرحله ارزیابی تکرار شد و امکان بررسی روند اصلاح بدفهمی‌های مفهومی را فراهم کرد.

جدول ۱: توالی جلسات آموزشی، آزمون‌ها و بازخوردهای شناختی

جلسه	محتوای آموزشی	آزمون و بازخورد شناختی
اول	مفاهیم پایه مشتق، تعریف مشتق، خط مماس و تفسیر نموداری شیب نقاط	آزمونی برگزار نشد؛ این جلسه برای ایجاد پیش‌نیازهای مفهومی اختصاص داشت.
دوم	مشتق‌پذیری و پیوستگی	آزمون اول (۵ سؤال، ۱۵ دقیقه)؛ ارائه پاسخ تشریحی، برگه تصحیح‌شده و بازخورد شناختی
سوم	تابع مشتق، مشتق تابع مرکب و مشتق دوم	آزمون دوم (۲ سؤال مروری + ۳ سؤال جدید، ۱۵ دقیقه)؛ ارائه بازخورد شناختی و گزارش پیشرفت
چهارم	مشتق‌پذیری روی بازه	آزمون سوم (۴ سؤال مروری + ۱ سؤال جدید، ۱۵ دقیقه)؛ تحلیل نهایی تغییرات استدلال‌ها

همان‌گونه که در جدول ۱ مشاهده می‌شود، آزمون‌ها به‌صورت تجمعی طراحی شدند؛ به این معنا که در هر مرحله، علاوه بر سؤالات مربوط به محتوای جدید، تعدادی سؤال از مباحث جلسات قبل نیز تکرار شد تا میزان اصلاح بدفهمی‌های مفهومی و پایداری یادگیری دانش‌آموزان بررسی شود. همچنین گزینه‌های نادرست هر سؤال بر اساس بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان طراحی شده بود و دانش‌آموزان موظف بودند علاوه بر انتخاب گزینه صحیح، دلیل نادرستی سایر گزینه‌ها را نیز توضیح دهند. این شیوه امکان آشکارسازی فرایندهای استدلالی و ارزیابی تغییرات شناختی دانش‌آموزان را فراهم ساخت.

۴. یافته‌ها

تحلیل داده‌های حاصل از آزمون‌های آموزشی، بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان و مقایسه نتایج پیش و پس از اجرای فعالیت‌های آموزشی نشان داد بخش قابل توجهی از اشتباهات مشاهده شده در مبحث مشتق صرفاً ناشی از ضعف محاسباتی نبوده، بلکه ریشه در بدفهمی‌های مفهومی و برداشت‌های نادرست دانش‌آموزان از مفاهیم بنیادین این مبحث داشته است. بررسی الگوهای پاسخ نشان داد بسیاری از دانش‌آموزان در تشخیص شرایط کاربرد مفاهیم، تفسیر نتایج و برقراری ارتباط میان نمایش‌های جبری و هندسی مشتق با مشکلاتی مواجه بوده‌اند.

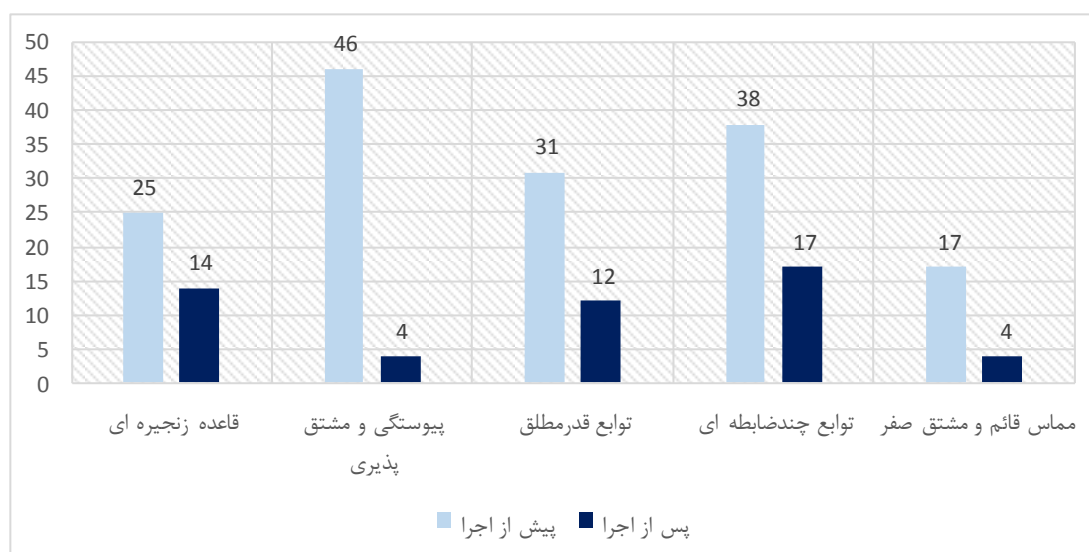
از مجموع ۵۷ دانش‌آموز شرکت‌کننده در پژوهش، فراوانی خطاهای مشاهده‌شده در محورهای مختلف مبحث مشتق پیش و پس از اجرای فعالیت‌های آموزشی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان داد میزان خطا در تمامی محورهای مورد مطالعه کاهش یافته است. بیشترین کاهش به خطاهای مرتبط با پیوستگی و مشتق‌پذیری و پس از آن به بدفهمی‌های مربوط به مماس قائم و مشتق صفر اختصاص داشت. همچنین در موضوعاتی مانند قاعده زنجیره‌ای، توابع قدرمطلق و توابع چندضابطه‌ای نیز کاهش قابل توجهی در فراوانی خطاها مشاهده شد.

جدول ۱ فراوانی خطاهای پرتکرار دانش‌آموزان را پیش و پس از اجرای فعالیت‌های آموزشی نشان می‌دهد.

جدول ۲: فراوانی خطاهای پرتکرار پیش و پس از اجرای فعالیت‌های آموزشی

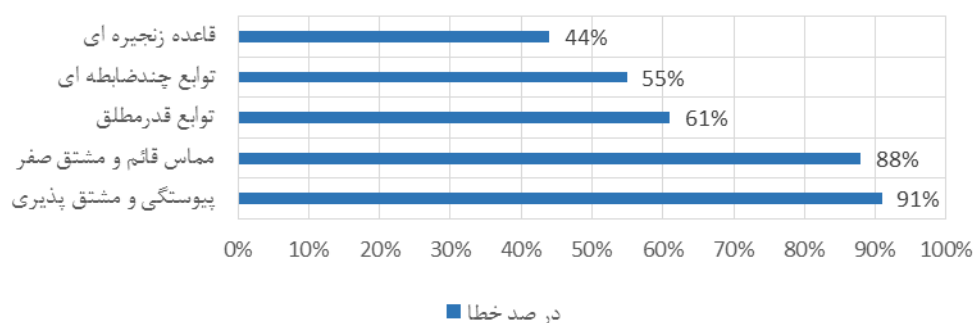
نوع خطا	پیش از اجرا	پس از اجرا	درصد کاهش خطا
قاعده زنجیره ای	۲۵	۱۴	۴۴٪
پیوستگی و مشتق‌پذیری	۴۶	۴	۹۱٪
توابع قدرمطلق	۳۱	۱۲	۶۱٪
توابع چند ضابطه‌ای	۳۸	۱۷	۵۵٪
مماس قائم و مشتق صفر	۱۷	۲	۸۸٪

همان گونه که در جدول ۲ مشاهده می‌شود، بیشترین میزان کاهش خطا مربوط به درک ارتباط میان پیوستگی و مشتق‌پذیری (۹۱ درصد) و پس از آن مربوط به مفهوم مماس قائم و مشتق صفر (۸۸ درصد) بوده است. در مقابل، کمترین میزان کاهش خطا به قاعده زنجیره‌ای (۴۴ درصد) اختصاص داشت. این یافته نشان می‌دهد فعالیت‌های مبتنی بر تحلیل خطا و بازخورد شناختی در اصلاح بدفهمی‌های مفهومی اثربخشی بیشتری نسبت به خطاهای عمدتاً الگوریتمی و محاسباتی داشته‌اند. بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان نشان داد خطاهای مشاهده‌شده را می‌توان در دو دسته کلی خطاهای مفهومی و خطاهای الگوریتمی - محاسباتی طبقه‌بندی کرد. در حوزه خطاهای مفهومی، بدفهمی‌هایی نظیر برداشت نادرست از مفهوم شیب خط مماس، تعمیم نادرست رابطه میان پیوستگی و مشتق‌پذیری و تحلیل ناقص رفتار توابع چندضابطه‌ای بیش از سایر موارد مشاهده شد. در حوزه خطاهای الگوریتمی - محاسباتی نیز خطا در به‌کارگیری قاعده زنجیره‌ای، مشتق توابع مرکب، مشتق خارج‌قسمت و توابع دارای قدرمطلق از مهم‌ترین الگوهای خطا به شمار می‌رفت.



نمودار ۱: مقایسه فراوانی خطاهای دانش‌آموزان پیش و پس از اجرای فعالیت‌های آموزشی

نمودار ۱ تغییرات فراوانی خطاهای دانش‌آموزان را پیش و پس از اجرای فعالیت‌های آموزشی نشان می‌دهد. مقایسه ارتفاع ستون‌ها بیانگر آن است که کاهش خطا در برخی محورهای مفهومی، به‌ویژه پیوستگی و مشتق‌پذیری و نیز مماس قائم و مشتق صفر، چشمگیرتر از سایر حوزه‌ها بوده است. این الگو نشان می‌دهد میزان بهبود در محورهای مختلف یکسان نبوده و برخی بدفهمی‌های مفهومی نسبت به سایر خطاها قابلیت اصلاح بیشتری داشته‌اند.



نمودار ۲: درصد کاهش خطاهای دانش‌آموزان پس از اجرای فعالیت‌های آموزشی مبتنی بر خطا

نمودار ۲، درصد کاهش خطاها را در محورهای مختلف مبحث مشتق نمایش می‌دهد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، میزان اثربخشی فعالیت‌های آموزشی در موضوعات مختلف متفاوت بوده است. بیشترین درصد کاهش به خطاهای مرتبط با پیوستگی و مشتق‌پذیری و پس از آن به مفهوم مماس قائم و مشتق صفر اختصاص دارد، در حالی که خطاهای مربوط به قاعده زنجیره‌ای کاهش کمتری را نشان می‌دهند. این تفاوت می‌تواند بیانگر پیچیدگی بیشتر برخی فرایندهای الگوریتمی در مقایسه با بدفهمی‌های مفهومی باشد. برای بررسی دقیق‌تر ماهیت اشتباهات شناسایی‌شده، الگوهای خطا در دو دسته کلی خطاهای مفهومی و خطاهای الگوریتمی - محاسباتی طبقه‌بندی شدند. جدول ۲ نمونه‌ای از مهم‌ترین خطاهای مفهومی مشاهده‌شده در پاسخ‌های دانش‌آموزان را نشان می‌دهد.

جدول ۳: نمونه‌ای از خطاهای مفهومی دانش‌آموزان در مبحث مشتق

مفهوم	نمونه خطا	تحلیل خطا
شیب خط مماس	مقایسه نادرست شیب‌های منفی	نا توانی در تفسیر رابطه شیب و جهت تغییر تابع
مماس قائم	در نظر گرفتن شیب صفر برای مماس قائم	برداشت نادرست از مفهوم شیب بی‌نهایت
مشتق پذیری	مشتق پذیر دانستن هر تابع پیوسته	تعمیم نادرست رابطه پیوستگی و مشتق‌پذیری
مشتق روی بازه	بررسی مشتق‌پذیری در دو سر بازه بسته	عدم توجه به تعریف مشتق در نقاط مرزی
توابع چندضابطه ای	محاسبه مشتق بدون بررسی پیوستگی تابع	ضعف در تحلیل هم‌زمان شروط مشتق‌پذیری

علاوه بر خطاهای مفهومی، تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان نشان داد بخشی از اشتباهات به کاربرد نادرست قواعد و الگوریتم‌های مشتق‌گیری مربوط است.

جدول ۴ نمونه‌ای از مهم‌ترین خطاهای الگوریتمی - محاسباتی مشاهده‌شده را ارائه می‌کند.

جدول ۴: نمونه‌ای از خطاهای الگوریتمی - محاسباتی دانش‌آموزان در مبحث مشتق

مفهوم	نمونه خطا	تحلیل خطا
قاعده زنجیره ای	$(\sin(3x^2))' = \cos(3x^2)$	نادیده گرفتن مشتق تابع داخلی در مشتق‌گیری
مشتق خارج قسمت	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g'}$	ضعف در کاربرد قواعد مشتق‌گیری
مشتق تابع مرکب	محاسبه ناقص مشتق چندمرحله‌ای	تشخیص نادرست ساختار تابع
مشتق قدرمطلق	مشتق‌گیری بدون توجه به علامت عبارت داخل قدرمطلق	بی‌توجهی به حالت‌های مختلف تابع
تعریف مشتق	حذف نادرست عبارتها در محاسبه حد	ضعف در کاربرد مفهوم حد و تعریف مشتق

الگوهای خطای ارائه شده در جدول های ۳ و ۴ بر اساس تحلیل پاسخ های دانش آموزان شناسایی شدند و مبنای طراحی فعالیت های آموزشی و بازخوردهای شناختی مورد استفاده در این پژوهش قرار گرفتند. تمرکز این فعالیت ها بر آشکارسازی شیوه های استدلال دانش آموزان، شناسایی بدفهمی های مفهومی و فراهم کردن فرصت هایی برای بازنگری در فرایندهای ذهنی آنان بود.

علاوه بر کاهش فراوانی خطاها، مشاهدات کلاسی نشان داد میزان مشارکت دانش آموزان در بحث های آموزشی و تحلیل پاسخ های نادرست در طول اجرای پژوهش افزایش یافته است. در جلسات پایانی، بسیاری از دانش آموزان علاوه بر تشخیص پاسخ صحیح، قادر بودند دلایل نادرستی سایر گزینه ها را نیز توضیح دهند و استدلال های ریاضی خود را با دقت بیشتری بیان کنند. این شواهد نشان می دهد بازخورد شناختی، هنگامی که در بستر یادگیری مبتنی بر خطا به کار گرفته شود، می تواند زمینه بازنگری در استدلال ها، اصلاح بدفهمی های مفهومی و تقویت درک منطقی دانش آموزان از مفاهیم ریاضی را فراهم آورد.

۴-۱. بدفهمی های مرتبط با تفسیر هندسی مشتق

تحلیل پاسخ های دانش آموزان نشان داد بخشی از خطاهای مشاهده شده به درک ناقص تفسیر هندسی مشتق مربوط است. دشواری در برقراری ارتباط میان مشتق و شیب خط مماس و نیز تفسیر رفتار نمودار تابع در نقاط مختلف، از جمله خطاهای پرتکرار دانش آموزان بود. یکی از مهم ترین بدفهمی های مشاهده شده، یکسان پنداشتن مفاهیمی مانند مشتق صفر، شیب صفر و مماس قائم بود. همچنین برخی دانش آموزان در مقایسه شیب خطوط مماس و استنباط روند تغییرات تابع از روی نمودار با مشکل مواجه بودند. بررسی پاسخ ها نشان داد که بسیاری از دانش آموزان، با وجود توانایی در اجرای قواعد مشتق گیری، ارتباط میان نمایش جبری مشتق و معنای هندسی آن را به درستی درک نکرده اند. اجرای فعالیت های مبتنی بر تحلیل خطا، مقایسه راه حل های مختلف و دریافت بازخوردهای شناختی، زمینه بازاندیشی در این برداشت ها را فراهم کرد. در نتیجه، توانایی دانش آموزان در تشخیص تفاوت میان انواع شیب، تفسیر رفتار نمودار تابع و استدلال بر پایه ویژگی های هندسی آن بهبود یافت.

این یافته با نتایج پژوهش عزتی و همکاران (۱۴۰۳) درباره بدفهمی های رایج در مفهوم شیب همسو است و نشان می دهد بخشی از مشکلات یادگیری مشتق، ریشه در برداشت های نادرست از مفاهیم هندسی مرتبط با شیب و نرخ تغییر دارد.

۴-۲. بدفهمی های مرتبط با مشتق پذیری و پیوستگی

بیشترین فراوانی خطاهای شناسایی شده به موضوع پیوستگی و مشتق پذیری اختصاص داشت. تعداد این خطاها از ۴۶ مورد در مرحله اولیه به ۴ مورد پس از اجرای فعالیت های آموزشی کاهش یافت که بیانگر اثربخشی مداخله آموزشی در اصلاح این بدفهمی هاست. بخش قابل توجهی از پاسخ های دانش آموزان نشان می داد که آنان پیوستگی را شرط کافی برای مشتق پذیری تلقی می کنند و در تحلیل نقاط گوشه دار، شکستگی ها و نقاط دارای مماس قائم دچار خطا می شوند. همچنین در مسائل مربوط به توابع چندضابطه ای، بسیاری از دانش آموزان تنها به محاسبه مشتق های چپ و راست توجه می کردند و شرط پیوستگی را نادیده می گرفتند. استفاده از پرسش های هدایتگر و بازخوردهای شناختی موجب شد دانش آموزان به تدریج ضرورت بررسی هم زمان شرایط پیوستگی و مشتق پذیری را درک کنند. شواهد حاصل از آزمون های پایانی نشان داد دقت آنان در تحلیل رابطه میان پیوستگی و مشتق پذیری و تشخیص نقاط عدم مشتق پذیری افزایش یافته است. این یافته را می توان در چارچوب نظریه «تصور مفهوم و تعریف مفهوم» تبیین کرد.

تال و وینر (Tall & Vinner, 1981) معتقدند فاصله میان تصویر ذهنی یادگیرنده از یک مفهوم و تعریف رسمی آن می تواند زمینه شکل گیری خطاهای پایدار را فراهم کند؛ موضوعی که در پاسخ های دانش آموزان درباره رابطه پیوستگی و مشتق پذیری به وضوح مشاهده شد. افزون بر بدفهمی های مفهومی، بخشی از خطاهای دانش آموزان به کاربرد نادرست قواعد و الگوریتم های مشتق گیری مربوط بود که در بخش بعدی بررسی می شود.

۳-۴. خطاهای مرتبط با قواعد مشتق‌گیری

بخش دیگری از خطاهای مشاهده‌شده به کاربرد نادرست قواعد مشتق‌گیری مربوط بود. اگرچه بیشتر دانش‌آموزان با قواعد اصلی مشتق آشنایی داشتند، در تشخیص ساختار توابع و انتخاب قاعده مناسب برای حل مسئله با مشکلاتی مواجه می‌شدند. بررسی پاسخ‌ها نشان داد این دسته از اشتباهات عمدتاً ناشی از به کارگیری الگوریتمی قواعد و توجه ناکافی به روابط میان اجزای تابع است.

در میان خطاهای الگوریتمی، خطاهای مربوط به قاعده زنجیره‌ای بیشترین فراوانی را داشت؛ به گونه‌ای که تعداد آن‌ها از ۲۵ مورد در مرحله اولیه به ۱۴ مورد پس از اجرای فعالیت‌های آموزشی کاهش یافت. رایج‌ترین اشتباه، نادیده گرفتن مشتق تابع داخلی یا اجرای ناقص مراحل مشتق‌گیری در توابع مرکب بود.

تحلیل پاسخ‌های خطا دار، مقایسه راه‌حل‌های مختلف و دریافت بازخوردهای شناختی موجب شد توجه دانش‌آموزان به ساختار توابع و منطق به کارگیری قواعد مشتق‌گیری افزایش یابد. این امر در نهایت به کاهش بخشی از خطاهای مرتبط با کاربرد قواعد مشتق در آزمون‌های پایانی منجر شد. یافته‌های این بخش با تمایز میان «درک ابزاری» و «درک رابطه‌ای» مورد نظر اسکمپ (Skemp, 1976) همخوانی دارد. بسیاری از خطاهای مشاهده‌شده نشان می‌داد دانش‌آموزان روش انجام محاسبات را می‌دانند، اما از چرایی و منطق مفاهیم زیربنایی آن درک عمیقی ندارند. بر این اساس، صرف تسلط بر الگوریتم‌های مشتق‌گیری برای یادگیری پایدار کافی نیست و توجه هم‌زمان به ابعاد مفهومی و استدلالی ضروری به نظر می‌رسد.

۴-۴. بدفهمی‌های مرتبط با توابع چندضابطه‌ای و قدرمطلق

تحلیل داده‌ها نشان داد توابع چندضابطه‌ای و توابع دارای قدرمطلق از جمله مباحثی بودند که بیشترین حجم خطاهای مفهومی و استدلالی را در بر داشتند. تعداد خطاهای مربوط به توابع چندضابطه‌ای از ۳۸ مورد به ۱۷ مورد و خطاهای مرتبط با توابع قدرمطلق از ۳۱ مورد به ۱۲ مورد کاهش یافت. با وجود این کاهش، این دو مبحث همچنان از دشوارترین موضوعات برای دانش‌آموزان محسوب می‌شدند. در مسائل مربوط به قدرمطلق، بخش قابل توجهی از خطاها ناشی از ناتوانی در تعیین صحیح علامت عبارت داخل قدرمطلق و تبدیل آن به نمایش چندضابطه‌ای بود.

همچنین در بررسی مشتق‌پذیری نقاط خاص، برخی دانش‌آموزان بدون تحلیل رفتار تابع در دو سوی نقطه مورد نظر، مستقیماً به مشتق‌گیری اقدام می‌کردند. در توابع چندضابطه‌ای نیز مشاهده شد که بسیاری از دانش‌آموزان محاسبات جبری را مستقل از بررسی پیوستگی و مشتق‌پذیری انجام می‌دادند و ارتباط میان این مفاهیم را به صورت یکپارچه در نظر نمی‌گرفتند. فعالیت‌های مبتنی بر تحلیل استدلال‌ها، بررسی پاسخ‌های خطا دار و دریافت بازخوردهای شناختی به تدریج موجب بهبود توانایی دانش‌آموزان در تشخیص شرایط مسئله، تحلیل نقاط مرزی و تفسیر رفتار تابع شد. کاهش اشتباهات مشاهده‌شده در این بخش نشان می‌دهد که یادگیری مبتنی بر خطا همراه با بازخورد شناختی می‌تواند در شناسایی بدفهمی‌ها و بازسازی تدریجی ساختارهای ذهنی دانش‌آموزان نقش مؤثری ایفا کند. این نتیجه با دیدگاه بوراسی (Borasi, 1994) مبنی بر ظرفیت آموزشی خطاها و نقش آن‌ها در تعمیق یادگیری مفهومی همسو است.

۵-۴. نقش بازخورد شناختی در تحلیل و اصلاح خطاها

یافته‌های پژوهش نشان داد نقش اصلی بازخورد شناختی در این مداخله آموزشی، ارائه پاسخ صحیح یا اصلاح مستقیم خطاها نبود؛ بلکه فراهم کردن فرصت‌هایی برای ارزیابی مجدد استدلال‌ها، بازاندیشی در شیوه تفکر و بازسازی دانش مفهومی دانش‌آموزان بود. در جریان فعالیت‌های آموزشی، خطاها به عنوان نشانه‌هایی از نحوه سازمان‌دهی مفاهیم و استدلال‌های دانش‌آموزان مورد توجه قرار گرفتند و بستری برای تأمل و بازاندیشی شناختی فراهم ساختند. دانش‌آموزان پس از مواجهه با پاسخ‌های خطا دار یا راه‌حل‌های نادرست، تنها به تشخیص پاسخ صحیح اکتفا نمی‌کردند؛ بلکه می‌کوشیدند منشأ خطا، مفروضات نادرست و مراحل استدلال منجر به آن را شناسایی و تحلیل کنند. این فرایند

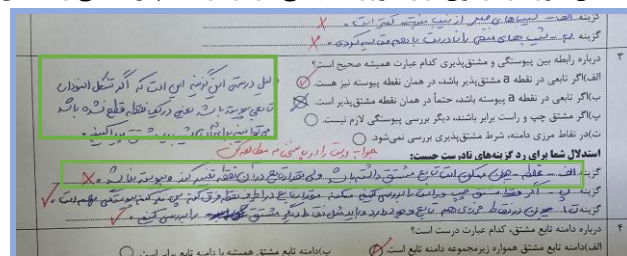
نوعی چرخه بازخورد شناختی ایجاد می کرد که در آن فراگیران از پیامدهای شیوه تفکر خود آگاه می شدند و فرصت می یافتند راهبردهای ذهنی خویش را مورد ارزیابی و اصلاح قرار دهند.

مشاهدات کلاسی نشان داد پس از چند مرحله مواجهه با این چرخه، توجه دانش آموزان به شرایط مسئله، روابط میان مفاهیم و منطق استدلال ها افزایش یافت. در این وضعیت، یادگیری صرفاً حاصل دریافت پاسخ درست نبود، بلکه از طریق مقایسه، تأمل، بازبینی و اصلاح تدریجی استدلال ها شکل می گرفت. همچنین کاهش فراوانی برخی خطاهای پرتکرار، هم زمان با افزایش توانایی دانش آموزان در تبیین دلایل پاسخ ها و نقد استدلال های نادرست مشاهده شد. این یافته با دیدگاه هتی و تیمپرلی (Hattie & Timperley, 2007) همسو است که بازخورد مؤثر را فراتر از اطلاع رسانی درباره درستی یا نادرستی پاسخ دانسته و آن را ابزاری برای هدایت فرایندهای شناختی و خودنظارتی یادگیرنده معرفی می کنند. همچنین نتایج پژوهش حاضر از این دیدگاه حمایت می کند که بازخورد شناختی، هنگامی که در بستر تحلیل خطاها به کار گرفته شود، می تواند به اصلاح بدفهمی های مفهومی، تقویت خودارزیابی و شکل گیری یادگیری پایدارتر منجر شود.

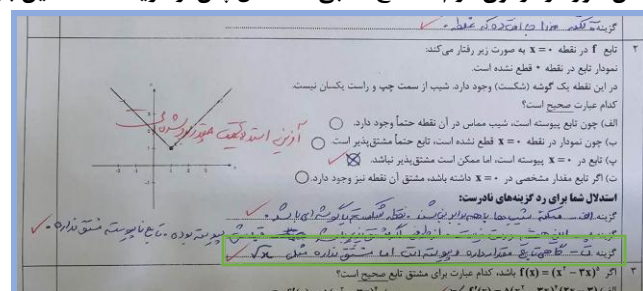
۴-۶. شواهدی از تحول استدلال دانش آموزان در طول مداخله آموزشی

به منظور ارائه شواهد کیفی از تأثیر بازخورد شناختی بر اصلاح بدفهمی های مفهومی، پاسخ های یکی از دانش آموزان در سه آزمون متوالی بررسی شد. این آزمون ها در پایان جلسات دوم، سوم و چهارم اجرا شدند. اگرچه صورت سؤال ها در سه آزمون یکسان نبود، همگی با هدف سنجش یک مفهوم مشترک، یعنی رابطه میان پیوستگی و مشتق پذیری طراحی شده بودند. در هر آزمون، دانش آموز علاوه بر انتخاب گزینه صحیح، موظف بود دلیل نادرستی سایر گزینه ها را نیز بیان کند. از آنجا که گزینه های نادرست بر اساس بدفهمی های رایج دانش آموزان طراحی شده بودند، تحلیل استدلال های ارائه شده امکان شناسایی دقیق تر برداشت های نادرست را فراهم می کرد. پس از هر آزمون نیز پاسخ نامه تشریحی، برگه تصحیح شده و بازخورد شناختی در اختیار دانش آموز قرار گرفت تا فرصت بازنگری در استدلال ها، مقایسه پاسخ خود با پاسخ صحیح و اصلاح برداشت های نادرست فراهم شود. شکل های ۲ تا ۴ نمونه ای از روند تحول پاسخ ها و استدلال های این دانش آموز را در سه آزمون متوالی نشان می دهد.

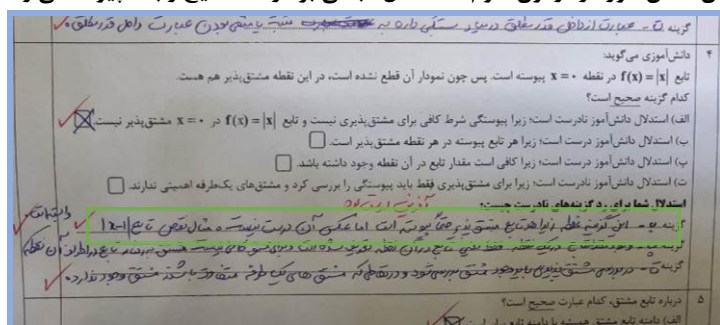
شکل ۲: پاسخ دانش آموز در آزمون اول؛ بروز بدفهمی درباره رابطه پیوستگی و مشتق پذیری.



شکل ۳: پاسخ همان دانش آموز در آزمون دوم؛ اصلاح نسبی استدلال پس از دریافت نخستین بازخورد شناختی.



شکل ۴: پاسخ همان دانش‌آموز در آزمون سوم؛ استدلال مبتنی بر درک صحیح رابطه پیوستگی و مشتق‌پذیری.



همان گونه که در شکل‌های ۲ تا ۴ مشاهده می‌شود، پاسخ‌های این دانش‌آموز روندی تدریجی از اصلاح بدفهمی مفهومی را نشان می‌دهد. در آزمون نخست، دانش‌آموز پیوستگی را به اشتباه شرط کافی برای مشتق‌پذیری تلقی کرده و استدلال خود را بر پیوسته بودن نمودار استوار ساخته بود. پس از دریافت بازخورد شناختی و تحلیل پاسخ‌های نادرست، در آزمون دوم توانست وجود نقاط گوشه‌دار و مماس قائم را به‌عنوان نمونه‌ای از توابع پیوسته اما مشتق‌ناپذیر تشخیص دهد. در آزمون سوم نیز استدلال او از بیان شهودی فراتر رفت و با استناد به تعریف مفهومی و ارائه مثال نقض، رابطه میان پیوستگی و مشتق‌پذیری را به‌درستی تبیین کرد. این نمونه کیفی، یافته‌های کمی پژوهش را درباره نقش بازخورد شناختی در اصلاح بدفهمی‌های مفهومی و بهبود کیفیت استدلال‌های ریاضی دانش‌آموزان تأیید می‌کند.

۴-۷. نمونه فعالیت‌های آموزشی مبتنی بر خطا و بازخورد شناختی

برای تبیین نحوه به‌کارگیری بازخورد شناختی در فرایند آموزش، نمونه‌ای از فعالیت‌های اجراشده در کلاس ارائه می‌شود. این فعالیت‌ها با هدف آشکارسازی بدفهمی‌های مفهومی، ارزیابی استدلال‌های نادرست و کمک به بازبینی شیوه‌های تفکر دانش‌آموزان طراحی شده بودند.

جدول ۵: نمونه‌ای از فعالیت‌های آموزشی مبتنی بر خطا و بازخورد شناختی

هدف از فعالیت	نمونه فعالیت	مفهوم
تشخیص ساختار تابع مرکب و توجه به نقش تابع داخلی در مشتق‌گیری	مشتق تابع $y = \sin(\pi x)$ را از میان گزینه‌ها انتخاب کنید و دلیل نادرستی سایر گزینه‌ها را توضیح دهید. الف) $y' = \cos(\pi x)$ ب) $y' = \pi x \cos(\pi x)$ ج) $y' = \pi \cos(\pi x)$ د) $y' = -\sin(\pi x)$	قاعده زنجیره‌ای
تفکیک شرط لازم و شرط کافی و تحلیل رابطه میان پیوستگی و مشتق‌پذیری	دانش‌آموزی ادعا می‌کند: "هر تابع پیوسته مشتق‌پذیر است." آیا این ادعا درست است؟ با ارائه مثال یا مثال نقض، استدلال خود را توضیح دهید.	مشتق‌پذیری و پیوستگی

الگوهای ارائه‌شده در جدول ۵ تنها نمونه‌ای از فعالیت‌های مورد استفاده در این پژوهش هستند. در تمامی فعالیت‌ها، دانش‌آموزان علاوه بر تعیین پاسخ صحیح، موظف بودند دلایل نادرستی سایر گزینه‌ها یا استدلال‌های ارائه‌شده را نیز تحلیل کنند. مشاهدات کلاسی نشان داد این فرایند به شناسایی منشأ خطاها، بازبینی استدلال‌های ریاضی و اصلاح تدریجی بدفهمی‌های مفهومی کمک کرده است. همچنین مشارکت دانش‌آموزان در بحث‌های آموزشی و توانایی آنان در تبیین دلایل پاسخ‌ها در جلسات پایانی افزایش یافت.

مشاهدات انجام شده در طول جلسات آموزشی حاکی از آن بود که این فرایند علاوه بر کاهش برخی خطاهای پرتکرار، توانایی دانش آموزان را در استدلال ریاضی، تبیین مفاهیم و تحلیل شرایط مسئله نیز تقویت کرده است. این نتایج با دیدگاه بوراسی (Borasi, 1994) مبنی بر ظرفیت آموزشی خطاها همخوانی دارد و نشان می‌دهد استفاده هدفمند از پاسخ‌های نادرست، هنگامی که با بازخورد شناختی همراه شود، می‌تواند به تعمیق یادگیری مفهومی و بازسازی دانش ریاضی دانش آموزان بینجامد.

۵. بحث و نتیجه‌گیری

پژوهش حاضر با هدف بررسی نقش بازخورد شناختی در هدایت دانش آموزان به بازاندیشی در استدلال‌ها و اصلاح بدفهمی‌های مفهومی آنان در بستر یادگیری مبتنی بر خطا و در آموزش مبحث مشتق انجام شد. یافته‌های پژوهش نشان داد بخش قابل توجهی از خطاهای دانش آموزان در این مبحث ریشه در بدفهمی‌های مفهومی و استفاده الگوریتمی از قواعد مشتق‌گیری دارد. بیشترین میزان خطا پیش از اجرای فعالیت‌های آموزشی در موضوعات پیوستگی و مشتق‌پذیری، توابع چندضابطه‌ای، توابع قدرمطلق و قاعده زنجیره‌ای مشاهده شد. نتایج نشان داد اجرای فعالیت‌های مبتنی بر تحلیل خطا همراه با بازخورد شناختی موجب کاهش فراوانی خطاها در تمامی محورهای مورد بررسی شد. بیشترین کاهش خطا در موضوع پیوستگی و مشتق‌پذیری و پس از آن در مفهوم مماس قائم و مشتق صفر مشاهده گردید. همچنین شواهد حاصل از تحلیل پاسخ‌ها و مشاهدات کلاسی نشان داد دانش آموزان در پایان فرایند آموزشی توانایی بیشتری در تشخیص شرایط کاربرد مفاهیم، تحلیل استدلال‌ها و تبیین دلایل پاسخ‌های خود داشتند. یافته‌های پژوهش نشان می‌دهد به کارگیری بازخورد شناختی در بستر یادگیری برمبنای خطا می‌تواند دانش آموزان را به تحلیل استدلال‌های خود، بازاندیشی در استدلال‌ها و اصلاح بدفهمی‌های مفهومی هدایت کند. بر این اساس، استفاده از فعالیت‌های آموزشی مبتنی بر تحلیل خطا همراه با بازخورد شناختی می‌تواند رویکردی مؤثر برای ارتقای یادگیری مفهومی در آموزش مشتق و سایر موضوعات ریاضی باشد. پیشنهاد می‌شود در پژوهش‌های آینده اثربخشی این رویکرد در سایر مباحث ریاضی، پایه‌های تحصیلی متفاوت و با نمونه‌های گسترده‌تر مورد بررسی قرار گیرد.

مشارکت نویسندگان

نویسنده مسئول طراحی پژوهش، اجرای فعالیت‌های آموزشی، گردآوری و تحلیل داده‌ها، تفسیر یافته‌ها، نگارش مقاله، بازنگری علمی متن و تأیید نهایی نسخه ارائه شده بوده است.

تشکر و قدردانی

نویسنده از دانش آموزان پایه دوازدهم رشته علوم تجربی که با مشارکت فعال خود زمینه اجرای این پژوهش را فراهم کردند، صمیمانه قدردانی می‌کند. همچنین از مدیریت و همکاران آموزشی مدرسه که در اجرای فعالیت‌های آموزشی و پژوهشی همکاری لازم را به عمل آوردند، سپاسگزاری می‌شود.

تعارض منافع

نویسنده اعلام می‌کند که در انجام پژوهش حاضر هیچ‌گونه تعارض منافع مالی، سازمانی، حرفه‌ای یا شخصی وجود نداشته است و نتایج پژوهش مستقل از هرگونه منافع فردی یا سازمانی گزارش شده‌اند.

منابع

- پارسی نیا، مهدی؛ هاشمی، سیدمهدی؛ کرامت، فاطمه؛ و خدارحم، انیس. (۱۴۰۰). بررسی بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزان پایه دهم در مبحث مجموعه‌ها. پژوهش در آموزش ریاضی.
- سیف، علی‌اکبر. (۱۳۹۸). روان‌شناسی پرورشی نوین. تهران: انتشارات دوران.
- عزتی، مهسا؛ صمدی، الهام؛ و عبدی‌سبوحی، نادره. (۱۴۰۳). بدفهمی‌های رایج در مفهوم شیب. پژوهش در آموزش ریاضی.
- فیروزیان، فریبا؛ و فیروزیان، سهیلا. (۱۴۰۳). نقش تعدیل‌گری انگیزش در رابطه بین تفکر خلاقانه و پیشرفت ریاضی دانش‌آموزان. پژوهش در آموزش ریاضی.

References

- Boaler, J. (2016). *Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential through Creative Mathematics, Inspiring Messages and Innovative Teaching*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Boomgaarden, H. G., & Loibl, K. (2024). Fostering learning from errors: A systematic perspective on productive failure and error-based learning. *Educational Psychology Review*. DOI: [To be completed]
- Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as “springboards for inquiry”: A teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 166–208. DOI: 10.5951/jresmetheduc.25.2.0166
- Clark, I. (2012). Formative assessment: Assessment is for self-regulated learning. *Educational Psychology Review*, 24(2), 205–249. DOI: 10.1007/s10648-011-9191-6
- Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81–112. DOI: 10.3102/003465430298487
- Hoth, J., Larrain, V., & Kaiser, G. (2022). Identifying and dealing with student errors in the mathematics classroom. *ZDM—Mathematics Education*, 54, 1081–1094. DOI: 10.1007/s11858-022-01397-z
- Nicol, D. J., & Macfarlane-Dick, D. (2006). Formative assessment and self-regulated learning: A model and seven principles of good feedback practice. *Studies in Higher Education*, 31(2), 199–218. DOI: 10.1080/03075070600572090
- Orton, A. (1983). Students’ understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14(3), 235–250. DOI: 10.1007/BF00410540
- Panadero, E., Broadbent, J., Boud, D., & Lodge, J. M. (2023). Using formative assessment to influence self-regulated learning and academic performance: A systematic review. *Educational Psychology Review*. DOI: [To be completed]
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20–26. DOI: Not available.
- Söderström, T., & Palm, T. (2024). Feedback in mathematics education research: A systematic literature review. *Educational Studies in Mathematics*. DOI: [To be completed]
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169. DOI: 10.1007/BF00305619
- Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV* (pp. 103–127). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Zheng, L., Li, X., Zhang, X., & Sun, W. (2023). Self-regulated learning: A systematic review and meta-analysis. *Educational Research Review*, 39, 100531. DOI: 10.1016/j.edurev.2023.100531
- Zimmerman, B. J. (2002). Becoming a self-regulated learner: An overview. *Theory into Practice*, 41(2), 64–70. DOI: 10.1207/s15430421tip4102_2.