



ORIGINAL RESEARCH PAPER

The Worked Examples and Self-Explanatory Questions Approach to Improve Students' Misunderstandings in the Topic of Algebra and Equations

Neda Tavanaei^{*1}, Ehsan Mahshoomi²

¹ PhD student in mathematics education, Tehran Azad University, Tehran, Iran.

² Algebra Ph.D. student, mathematics teacher in Behbahan city, Iran.

ABSTRACT

Keywords:

Worked examples, self-explanatory questions misunderstandings, content standards, algebra and equations, Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM)

1. Corresponding author
✉ neda.tavanaie@gmail.com

Received: 2024/12/23

Reviewed: 2025/02/15

Accepted: 2025/05/20

Background and Objectives: In the process of learning mathematics, misunderstandings are recognized as major obstacles that can lead to learning difficulties. Misconceptions and challenges in learning mathematics are prevalent among most students, and if timely corrective interventions are not provided, many of them may perceive mathematics as a difficult subject within the school curriculum. Identifying and understanding the roots of these misunderstandings, especially in topics like algebra, is essential for improving learning outcomes. One effective strategy in this regard is the use of worked examples and self-explanatory questions. This method helps students recognize their misconceptions and gain a better understanding of mathematical concepts. By targeting students' errors and misconceptions and providing diverse examples, teachers can enhance comprehension of the fundamental components of algebra and assist students in identifying and correcting incorrect procedures. In this article, a combination of worked examples and self-explanatory questions is proposed to reduce misunderstandings in the topic of algebra. The alignment of this approach with the core principles of the Common Core State Standards for Mathematics in the United States is also discussed. Additionally, insights from several mathematics teachers regarding the benefits of using these approaches are presented.

ISSN (Online): 2783- 4379

DOI: [10.48310/rme.2025.17838.1102](https://doi.org/10.48310/rme.2025.17838.1102)

Citation (APA): Tavanaei, N. and Mahshoomi, E. (2024). The Worked Examples and Self-Explanatory Questions Approach to Improve Students' Misunderstandings in the Topic of Algebra and Equations. *Research in Mathematics Education*, 4 (2), 69- 81 .

 <https://doi.org/10.48310/rme.2025.17838.1102>



رویکرد مثال های کار شده و سوالات خودتوضیحی برای بهبود بدفهمی های دانش آموزان در مبحث جبرومعادله

مقاله پژوهشی / مروری

ندا توانایی^{۱*}، احسان مهشومی^۲

۱ دانشجوی دکترای آموزش ریاضی، دانشگاه آزاد واحد تهران مرکز، تهران، ایران.

۲ دانشجوی دکترای جبر، دانشگاه شهرکرد، دبیر ریاضی شهرستان بهبهان، ایران.

چکیده

در فرآیند یادگیری ریاضیات، بدفهمی ها بزرگ ترین موانع یادگیری شناخته می شوند که می توانند منجر به مشکلات یادگیری شوند. بدفهمی و چالش های یادگیری ریاضیات در اکثر دانش آموزان وجود دارد و در صورت عدم ارائه مداخلات اصلاحی به موقع، بسیاری از آنها، ریاضیات را به عنوان یک موضوع دشوار در برنامه درسی مدرسه ای در نظر می گیرند. شناسایی و درک ریشه های این بدفهمی ها، به ویژه در مباحثی مانند جبر، برای بهبود یادگیری ضروری است. یکی از راهکارهای مؤثر در این زمینه، استفاده از رویکرد مثال های کار شده و سوالات خودتوضیحی می باشد. این روش به دانش آموزان کمک می کند تا تصورات نادرست خود را شناسایی و درک بهتری از مفاهیم ریاضی پیدا کنند. معلمان با هدف قرار دادن اشتباهات و باورهای نادرست دانش آموزان و ارائه مثال های متنوع، می توانند درک مؤلفه های اساسی جبر را تقویت کرده و به دانش آموزان در تشخیص و اصلاح رویه های نادرست کمک کنند. هدف این مقاله معرفی رویکرد مثال های کار شده و سوالات خودتوضیحی برای کاهش بدفهمی دانش آموزان در مبحث جبر می باشد و گام هایی برای طراحی این مثالها بیان می شود. همچنین به نحوه مطابقت آن با اصول هسته مشترک استانداردهای ریاضی آمریکا اشاره شده و در ادامه دیدگاه های چند دبیر ریاضی در مورد مزایای استفاده از این رویکردها، بیان می گردد. رویکرد مثال های کار شده و سوالات خودتوضیحی می توانند به عنوان یک روش تدریس مورد استفاده دبیران ریاضی قرار بگیرد.

از دستگاه خود برای اسکن و خواندن
مقاله به صورت آنلاین استفاده کنید.

واژه های کلیدی

مثال های کار شده، سوالات
خودتوضیحی، بدفهمی، استاندارد
محتوایی، جبر و معادله، اصول هسته
مشترک استانداردهای ریاضی آمریکا

۱. نویسنده مسئول
neda.tavanaie@gmail.com

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۰/۰۳

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۱۱/۲۷

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۲/۳۱

شماره صفحات: ۸۱-۶۹

DOI: [10.48310/rme.2025.17838.1102](https://doi.org/10.48310/rme.2025.17838.1102)

شاپا الکترونیکی: ۴۳۷۹-۲۷۸۳



OPYRIGHTS

©2024 The author(s). This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, as long as the original authors and source are cited. No permission is required from the authors or the publishers.

مقدمه

محققان مستند کرده اند و معلمان با توجه به تجارب خود پی برده اند که جبر "دروازه بان" موضوع ریاضیات پیشرفته است که می تواند مسیر پیشرفت دانش آموزان را مسدود و یا منحرف سازد. دانش آموزان باید درک قوی از مفاهیم اساسی جبر داشته باشند تا در دوره های بعدی ریاضیات موفق شوند. برای بسیاری از دانش آموزان در سراسر دنیا، با شروع جبر، سختی ریاضی بیشتر شده و آغازی برای جدا شدن آنها از ریاضی می شود (اصغری، ۲۰۱۴، استار و بتانی، ۲۰۰۹ و کاپوت، ۲۰۰۲). این مفاهیم نقش مهمی در برنامه درسی ریاضی ایفا می کنند که از مهمترین مباحث آن معادلات و حل آن است.

مفهوم معادله از مفاهیم دیگری از جمله اعداد، عملگرهای محاسباتی، عبارات جبری، نماد تساوی و متغیر تشکیل می شود (نتسوهی، ۲۰۰۵). پس معادله یک مفهوم انتزاعی است و چند مرحله از انتزاع جهت شکل گیری آن لازم است. بنابراین در هر کدام از مراحل شکل گیری این مفهوم، ممکن است بین مفاهیمی که در ذهن دانش آموزان تشکیل می شود و آن مفاهیمی که باید یاد بگیرد، مغایرت وجود داشته باشد که باعث ایجاد اشتباهات مفهومی گسترده در این مبحث می شود.

بدفهمی ها خطاهای نظام مندی اند که معمولاً ناشی از تعمیم نادرست ایده هایی اند که در حالتهای خاص یادگیری در ذهن یادگیرنده شکل گرفته اند. اغلب دانش آموزان توانایی برقراری ارتباط بین دانش جدید و شبکه دانش موجود را ندارند؛ زیرا یا دانش موجود ناقص است و یا درست است ولی آنگونه توسعه نیافته است که با دانش جدید هم راستا شود. در این دو وضعیت دانش آموز تفسیرهای خود از اطلاعات را می سازد و بر مبنای آن با اطلاعات پیشین پیوندهای خود را برقرار می کند. این تفسیرها و پیوندهای ناقص و معیوب به خطاهای سیستماتیک منجر می شوند که از آنها با عنوان بدفهمی یاد می شود (بخشعلی زاده و بروجردیان، ۱۳۹۶).

بدفهمی ها مانعی برای یادگیری مفهومی ریاضیات هستند. پیش بینی شده است که دانش آموزان در ایجاد دانش ریاضی خود از طریق بسط و ادغام ایده های جدید، فعالانه شرکت کنند. بنابراین تا زمانی که باورهای غلط شناسایی و اصلاح نشود، خطر تعارض شناختی و خطاهای بیشتر وجود دارد (فانتشو و وانگمو، ۲۰۲۳). تحقیقات نشان داده است که تصورات غلط در درس ریاضیات و در بین دانش آموزان همه پایه ها وجود دارد. حتی دانش آموزانی که ریاضیاتی خوب و قوی دارند، در صورت تاخیر در انجام اقدامات اصلاحی، ریاضیات را به عنوان یکی از دشوارترین دروس در برنامه درسی مدرسه در نظر می گیرند. در میان شاخه های ریاضی، جبر می تواند بدفهمی های زیادی را در بر داشته باشد و سبب کاهش عملکرد در ریاضیات شود. مطالعات نشان می دهند که جبر مقدماتی برای توسعه دانش ریاضیات دانش آموزان در هنگام آزمایش ایده های انتزاعی که پایه جبر را تشکیل می دهند، ضروری است (مالیونگی و همکاران، ۲۰۱۶).

ممکن است عوامل زیادی وجود داشته باشد که بر یادگیری در ریاضیات تأثیر بگذارد، اما یکی از مهم ترین موانع یادگیری ریاضیات، بدفهمی ها هستند. تصور غلط در هر سنی و در هر مقطع تحصیلی قابل مشاهده است. علاوه بر این، اوجوسو (۲۰۱۵) ادعا کرد که بدفهمی ها در دانش آموزان در تمام سطوح و پایه ها و در مورد انواع دروس ریاضی وجود دارند. به همین ترتیب، باورهای نادرست در مورد مفاهیم ریاضی و عدم درک ایده های اصلی آن، دانش آموزان را از یادگیری مفاهیم در زمانی که با چالش های جدیدی در هنگام انجام عملکرد ریاضی، مواجه می شوند، باز می دارد. اکثر آموزشگران ریاضی موافق هستند که جبر جزء اساسی و مهم آموزش و یادگیری ریاضیات است و به عنوان یک موضوع اصلی، به ویژه برای ریاضیات پایه های متوسطه در نظر گرفته می شود. جبر شکل گسترده ای از عملیات است که شامل نمادها و ایده های جبری است. در نتیجه، تصورات نادرست در مورد جبر تأثیر زیادی بر نحوه یادگیری ریاضیات توسط دانش آموزان دارد. بنابراین، پرداختن به بدفهمی ها در مورد جبر کلاس هفتم، خصوصاً حل معادله، حائز اهمیت بوده که می تواند موجب افزایش موفقیت تحصیلی شده و عملکرد دانش آموزانی را که در حل مسائل جبر و معادله ضعیف هستند را توسعه بخشد.

تحقیقات نشان می دهند بسیاری از دانش آموزان در رابطه با درک و حل معادله مشکل دارند (نتسوهی، ۲۰۰۵). دانش آموزان اشتباهات مفهومی متعددی در مبحث معادله از جمله تعریف معادله، نماد تساوی، متغیر، حل معادله، تبدیل مسائل کلامی و هم ارزی معادلات دارند (کریمی کیا و همکاران، ۱۳۹۱). از سوی دیگر، ایجاد درک مفهوم معادله در دانش آموزان مهم و ضروری است. بنابراین لازم است که تلاشهایی برای ایجاد درک مفهومی معادلات انجام شود (توساوینن و همکاران، ۲۰۱۱).

با توجه به مطالب ذکر شده، مقاله حاضر برای بهبود وضعیت بدفهمی های دانش آموزان در مبحث معادله، رسیدگی بر این باورهای غلط را با استفاده از ابزارهای رویکرد مثال های کار شده و سوالات خودتوضیحی پیشنهاد داده و مزایای استفاده از آن بیان می گردد. همچنین گام های ایجاد مثال های کار شده و سوالات خودتوضیحی عنوان می شود و در ادامه نحوه مطابقت آن با اصول هسته مشترک استانداردهای ریاضی آمریکا شرح داده خواهد شد.

رویکرد مثال های کار شده و سوالات خودتوضیحی

یک مثال کار شده در ریاضیات، مسئله ای است که بوسیله ی یک یا چند دانش آموز با روش های گوناگون (درست یا نادرست) کار شده، سپس دیگر دانش آموزان درستی یا نادرستی رویه تکمیل حل آن مساله را مورد نقد و بررسی و بحث قرار می دهند (کلارک، نگوین و سولر، ۲۰۱۱) و سوالات خودتوضیحی، سوالاتی هستند که به وسیله معلم در حین حل مساله، پرسیده می شود که دانش آموزان را تشویق می کند تا مساله و چالش های آنرا به زبان خودشان توضیح دهند. مثال های کار شده نادرست، به دانش آموزان کمک می کند تا رویه های نادرست را تشخیص دهند و به تفاوت های بین آنها و رویه های درست فکر کنند، که می تواند دانش مفهومی و رویه ای دانش آموزان را افزایش دهد (بوث و همکاران، ۲۰۱۳). مثال های کار شده، به دانش آموزان اجازه می دهد تا مفهوم تازه آموخته شده خود را تمرین کنند. وقتی دانش آموزان برای یک مثال کار شده وقت می گذارند، در حین بررسی سؤال، مشکل را برای خودشان توضیح می دهند. آنها شروع به شکستن باورهای غلط قبلی خود می کنند که به تقویت درک مفاهیم جبری آنها می انجامد (اتکینسون و همکاران، ۲۰۰۰).

در شکل ۱ به عنوان نمونه یک مسئله که با این رویکرد حل شده بیان می گردد.

شکل ۱: ترکیب یک مثال کار شده و سوالات خودتوضیحی

✓ امیرعباس این سوال را به درستی حل کرد.

$$\begin{array}{rcl}
 6 - k & = & -3 \\
 -6 & & -6 \\
 \hline
 -k & = & -9 \\
 \div -1 & \div -1 & \\
 \hline
 k & = & 9
 \end{array}$$

چرا امیرعباس ۶ را از هر دو طرف معادله کم کرد؟

چرا امیرعباس طرفین تساوی را بر ۱- تقسیم کرد؟

نویسنده: شما

۶-۳=-۳

مطابقت با اصول هسته مشترک استانداردهای ایالتی آمریکا

اگرچه بدیهی است که استفاده از رویکرد مثال های کار شده و سوالات خود توضیحی می تواند یادگیری دانش آموز را بهبود می بخشد و به دانش آموزان کمک می کند تا با تصورات نادرست خود مقابله کنند، اما مهم است، اطمینان

حاصل شود که این رویکرد با اصول هسته مشترک استانداردهای ایالتی آمریکا برای ریاضیات (CCSSM) مطابقت دارد. با در نظر گرفتن این نکته که این رویکرد به معلمان کمک می کند تا استانداردهای تمرین ریاضی (SMP) را در کلاس درس خود ادغام کنند، مسائل مربوط به مثال های کار شده و سوالات خود توضیحی را می توان با هر استاندارد محتوایی مطابقت داد.

اولین استاندارد، درک مسائل و پشتکار در حل آنها می باشد. یعنی دانش آموزان متبحر ریاضی با توضیح و شرح معنای یک مسئله و جستجوی نقاط ورودی برای حل آن، شروع می کنند.

دانش آموزان مسلط به ریاضی با توضیح دادن معنای یک مسئله و جستجوی نکات ورودی برای حل آن شروع می کنند. آنها داده ها، قیود، روابط و اهداف را تجزیه و تحلیل کرده، در مورد راه حل مسئله حدس می زنند و مسیر راه حل را برنامه ریزی می کنند نه اینکه صرفاً به تلاشی برای حل مسئله بپردازند. آنها مسائل مشابه، موارد خاص و اشکال ساده تری از مسئله اصلی را در نظر می گیرند تا در مورد راه حل آن بینش پیدا کنند، پیشرفت خود را نظارت و ارزیابی می کنند و در صورت لزوم مسیر خود را تغییر می دهند. دانش آموزان با تجربه تر بسته به بافت مسئله، زاویه دید خود را عوض می کنند تا به اطلاعاتی که نیاز دارند دست یابند. دانش آموزانی که در ریاضی تبحر دارند می توانند تناظر میان معادلات، توصیفات کلامی، جداول و نمودارها را درک کرده یا نمودار ویژگی ها و روابط مهم و داده ها را رسم کرده و روندها و قاعده ها را جستجو کنند. دانش آموزان پایه های پایین تر می توانند بر استفاده از اشیاء یا تصاویر عینی برای ارائه مفهوم و حل یک مسئله کمک بگیرند. دانش آموزان متبحر در ریاضی، پاسخ خود به سوالات را با استفاده از یک روش متفاوت بررسی می کنند و دائماً از خود می پرسند «آیا این روش می تواند منطقی باشد؟» آنها می توانند رویکردهای دیگران برای حل مسائل پیچیده را درک کرده و روابط میان رویکردهای مختلف را شناسایی کنند (CCSSI 2010).

راهبرد آموزشی مثالهای کار شده و سوالات خودتوضیحی، کمک می کند تا دانش آموزان بتوانند از طریق این فرآیند کار کنند و به درک درستی از مسئله دست یابند. استفاده از مثال های کار شده به دانش آموزان اجازه می دهد تا یک نقطه ورود به مسئله را پیدا کنند و سوالات خود توضیحی دانش آموزان را وادار می کنند تا معنای مسئله را برای خود توضیح دهند. این فرآیند نه تنها دانش آموزان را ملزم می کند که به روشی جدید درباره مسئله فکر کنند، بلکه به دانش آموزان کمک می کند تا بتوانند در موقعیت های مختلف، رویکردهای مختلفی را که همکلاسی هایش ممکن است از آنها استفاده کند را درک کنند.

دومین استاندارد، به استدلال مسائل را به صورت انتزاعی و کمی، اشاره دارد.

دانش آموزانی که از نظر ریاضی مسلط هستند در موقعیت های حل مساله، کمیت ها و روابط آنها را درک می کنند. آنها دو توانایی مکمل، برای مقابله با مسائل مربوط به روابط کمی را دارا هستند. اولاً انتزاع یک موقعیت معین و بازنمایی آن به صورت نمادین و بکارگیری از نمادهای مسئله (توانایی بافت زدایی) و مکث در صورت لزوم، در طول فرآیند بکارگیری از نمادها، به منظور کاوش در ارجاعات برای نمادهای موجود (توانایی زمینه سازی). استدلال کمی، مستلزم ایجاد یک نمایش منسجم از مساله، اهمیت درک کمیت ها و نه فقط نحوه محاسبه آنها، رابطه آنها در موقعیت های حل مساله و همچنین دانستن و منعطف بودن نسبت به خواص مختلف عملیات و اشیاء می باشد (CCSSI 2010).

مثال های کار شده و سوالات خود توضیحی نیز به صورت انتزاعی و کمی همسو هستند. سوالات خود توضیحی که به دقت بیان شده باشند به دانش آموزان کمک می کند تا این هدف را به انجام برسانند. برای مثال، می توان به صراحت از دانش آموز خواست توضیح دهد که قسمت حذف شده از یک مساله، چه می تواند باشد و مفهوم آن چیست و به این صورت بحثی در کلاس درس به راه بیفتد. مثال های کارکردنی نیز سبب درک بهتر مقادیر، نمادها، کمیت ها و روابط بین آنها در دانش آموزان می شود.

سومین استاندارد، ساختن مباحث معقول و انتقاد کردن از استدلال دیگران می‌باشد. دانش‌آموزان متبحر در ریاضی فرضیات و تعاریف بیان‌شده و نتایج از پیش تعیین‌شده را درک کرده و از آنها در ساختن مباحث استفاده می‌کنند. دانش‌آموزان حدس‌هایی زده و تسلسلی منطقی از عبارات می‌سازند تا بتوانند درستی حدس‌های خود را امتحان کنند. آن‌ها می‌توانند شرایط را با تجزیه کردن به چند مورد تجزیه و تحلیل کرده و مثال‌های نقض را شناخته و از آن‌ها استفاده کنند همچنین نتایج خود را توجیه کرده، آن را با دیگران به اشتراک گذاشته و به بحث‌های دیگران واکنش نشان می‌دهند. دانش‌آموزان متبحر با قیاس در مورد داده‌ها استدلال کرده، بحث‌های معقولی ارائه می‌دهند و در این مباحث بافتی که داده‌ها از آن حاصل شده‌اند را مد نظر قرار می‌دهند. این دانش‌آموزان همچنین می‌توانند کارایی دو مبحث معقول را با هم مقایسه کرده، میان منطق و استدلال درست از استدلال نادرست تمایز قائل شده و اگر خدشه‌ای در مبحثی وجود دارد می‌توانند توضیح دهند که این خدشه چیست. دانش‌آموزان دوره ابتدایی می‌توانند با استفاده از ارجاعات عینی مثل اشیاء، نقش‌ها، نمودارها و اقدامات مباحثی بسازند. این مباحث می‌توانند منطقی و صحیح باشند. حتی اگر تا زمانی رسیدن دانش‌آموز به درجات بالا تعمیم نیافته یا به رسمیت شناخته نشوند. در ادامه، دانش‌آموزان یاد می‌گیرند هر مبحثی در چه حوزه‌ای کاربرد دارد. دانش‌آموزان در همه سطوح می‌توانند مباحث دیگران را بخوانند و بشوند و تصمیم بگیرند که آیا آن‌ها منطقی هستند یا خیر و سوالات سودمندی برای روشن ساختن یا بهبود مباحث بپرسند (CCSSI 2010).

مثال‌های کامل کردنی، تلاش یک دانش‌آموز ساختگی را نشان می‌دهد. بنابراین، دانش‌آموز واقعی ممکن است هنگام پاسخ دادن به درخواست‌های توضیح، نقد و استدلال دانش‌آموز دیگر را در محیط امن‌تری انجام دهد. علاوه بر این، استفاده از مثال‌های کار شده ای که نادرست هستند به دانش‌آموزان این فرصت را می‌دهد تا منطق یا استدلال صحیح را از آنچه که ناقص است تشخیص داده و اگر نقصی در یک استدلال وجود دارد، توضیح کاملی برای چپستی آن ارائه دهد. از طریق استفاده از مثال کار شده و سوالات خود توضیحی، ساخت استدلال‌های قابل اجرا و نقد استدلال دیگران انجام می‌گیرد.

چهارمین استاندارد، مدل‌سازی با ریاضیات می‌باشد.

دانش‌آموزان متبحر در ریاضی می‌توانند از همان میزان ریاضیاتی که می‌دانند برای حل مسائلی که در زندگی روزمره، جامعه و محل کار ایجاد می‌شود استفاده کنند. در سطوح پایه، این کار می‌تواند ساده باشد مثل نوشتن یک معادله جمع برای توضیح یک موقعیت. در سطوح متوسط، دانش‌آموز می‌تواند از استدلال تناسبی برای برنامه‌ریزی یک رخداد در مدرسه یا تحلیل یک مسئله در جامعه استفاده نماید. یک دانش‌آموز دبیرستانی می‌تواند از جبر برای حل یک مسئله، بهره‌برداری یا اینکه با استفاده از یک تابع توضیح دهد که چگونه یک کمیت سود به کمیتی دیگر مربوط می‌شود. دانش‌آموزان متبحر در ریاضی که می‌توانند از دانش خود استفاده کنند، به راحتی فرضیات و تقریب‌هایی ارائه می‌دهند تا یک شرایط پیچیده را ساده کرده و درک می‌کنند که این شرایط ممکن است در آینده نیز نیاز به بازبینی داشته باشند. آن‌ها می‌توانند مقادیر مهم در شرایط عملی را شناسایی کرده و موقعیت روابط خود را با استفاده از ابزارهایی نظیر نمودارها، فرمول‌ها و فلوچارت‌ها مشخص کنند. آن‌ها می‌توانند این روابط ریاضی را تجزیه و تحلیل کنند تا به نتایج دست یابند. آن‌ها پی‌درپی نتایج ریاضیاتی خود را در بافت موقعیت تفسیر کرده و مداوماً فکر می‌کنند آیا نتایج‌شان منطقی است و اگر مدل در نظر گرفته شده برای هدفش مناسب نبود تا حد ممکن آن را بهبود می‌دهند (CCSSI 2010).

مثال‌های کار شده و سوالات خود توضیحی، مدل‌سازی را در بطن خود دارند و سبب می‌شود دانش‌آموزان بتوانند مسئله را در موقعیت‌های مختلف تفسیر نمایند تا در نهایت راه صحیح حل مسئله را پیدا کنند. در مثال‌های کامل کردنی، دانش‌آموز، پاسخ دیگر هم‌کلاسی‌های خود را تجزیه و تحلیل کرده و روابط و کمیت‌های استفاده شده را مورد بررسی قرار می‌دهد و در مورد درستی یا نادرستی حل و نتایج آنها تفکر می‌کند.

پنجمین استاندارد، به استفاده راهبردی از ابزارها اشاره دارد.

دانش‌آموزان متبحر در ریاضی در زمان حل یک مسئله ریاضی ابزارهای در دسترس را مد نظر قرار می‌دهند. این ابزارها می‌توانند عبارت باشند از مداد و کاغذ، مدل‌های عینی، یک خط‌کش، یک نقاله، یک ماشین حساب، یک صفحه گسترده، یک سیستم جبری کامپیوتری، یک بسته آماری یا یک نرم‌افزار هندسه پویا. دانش‌آموزان حرفه‌ای به میزان کافی با ابزارهای مناسب برای سطح یا رشته خود آشنایی داشته و می‌توانند به درستی تصمیم بگیرند کدامیک از این ابزارها می‌توانند سودمند باشند و محدودیت‌ها و بینشی که هر یک به‌دست می‌دهند را می‌شناسند. برای مثال، دانش‌آموزان دبیرستانی متبحر در ریاضی نمودار توابع و راه‌حل‌های ایجادشده را با استفاده از یک ماشین حساب نموداری تجزیه و تحلیل می‌کنند. آن‌ها خطاهای ممکن را به‌صورت راهبردی با استفاده از برآورد و دیگر دانش‌های ریاضیاتی شناسایی می‌کنند. آن‌ها می‌دانند که در زمان ساختن مدل‌های ریاضی، فناوری می‌تواند به آن‌ها این توان را بدهد که نتایج فرضیات مختلف را تصویرسازی کرده، نتایج را بررسی و پیش‌بینی‌ها را با داده‌ها مقایسه کنند. دانش‌آموزان متبحر در ریاضی در سطوح مختلف می‌توانند منابع خارجی مربوطه ریاضیاتی مثل محتوای دیجیتالی موجود در یک وب‌سایت را شناسایی کرده و از آن‌ها برای ایجاد یک حل مسئله استفاده نمایند. آن‌ها می‌توانند از ابزارهای فناورانه برای کنکاش و عمیق‌تر کردن درک خود از مفاهیم استفاده کنند (CCSSI 2010).

جهت جذاب شدن شیوه حل مسائل، می‌توان از ابزارهای مختلفی استفاده کرد. حل مثال‌های کار شده و سوالات خود توضیحی با استفاده از چنین امکاناتی، باعث ماندگاری آن در ذهن دانش‌آموز و یادگیری بهتر مطالب مورد نظر می‌گردد و فرصت بررسی، جستجو و پیش‌بینی مسائل را به طریقی جذاب تر برای دانش‌آموزان پدید می‌آورد.

ششمین استاندارد، توجه به صحت و دقت در پاسخگویی به مسائل

دانش‌آموزان متبحر در ریاضی سعی می‌کنند با دیگران به دقت ارتباط برقرار کنند. آن‌ها سعی می‌کنند از تعاریف روشن در بحث و استدلال‌های خود با دیگران استفاده کنند. آن‌ها معنای نمادهایی را که انتخاب می‌کنند (از جمله نماد مساوی) همیشه و به‌درستی بیان می‌کنند. در مورد مشخص کردن واحدهای ارزیابی و نام‌گذاری محورها برای روشن ساختن تناظر با مقادیر در یک مسئله، محتاط هستند. آن‌ها با دقت کار محاسبه را آغاز می‌کنند و پاسخ‌های عددی را با درجه‌ای از دقت، که برای بافت مسئله مناسب است بیان می‌کنند. دانش‌آموزان سطوح ابتدایی فرمول‌ها را با دقت برای یکدیگر توضیح می‌دهند. با گذشت زمان هنگامی که به دبیرستان می‌رسند یاد گرفته‌اند ادعاها را بررسی کرده و از تعاریف به طور دقیق و روشن استفاده کنند (CCSSI 2010).

مثال‌های کار شده و سوالات خود توضیحی به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا به این هدف دست پیدا کنند و دقت و صراحت را در پاسخ دادن به سوالات، به نمایش می‌گذارند. این دو رویکرد سبب می‌شود دانش‌آموزان از تعاریف و نمادهایی که در مسئله وجود دارد، به طور صحیح و مناسب استفاده کنند و از آن در بحث و استدلال‌های خود بهره بگیرند.

هفتمین استاندارد، جستجو برای به‌دست آوردن ساختار و استفاده از آن

دانش‌آموزان متبحر در ریاضی با دقت به دنبال تمیز دادن یک الگو یا ساختار هستند. برای مثال، دانش‌آموزان پایه‌های پایین‌تر ممکن است متوجه شوند که سه بعلاوه هفت برابر است با هفت بعلاوه سه یا می‌توانند مجموعه‌ای از اشکال را بر اساس تعداد اضلاعی که دارند دسته‌بندی کنند. در ادامه دانش‌آموزان زمانی که برای یادگیری در مورد خاصیت توزیع‌پذیری آماده می‌شوند متوجه خواهند شد که 8×7 برابر است با ساختار $5 \times 7 + 3 \times 7$ که پیش‌تر نیز آنرا به خوبی به خاطر داشته‌اند. دانش‌آموزان مقاطع بالاتر در عبارت $x^2 + 9x + 14$ می‌توانند به جای 14 عبارت 7×2 و به جای 9 عبارت $7 + 2$ را قرار دهند. آن‌ها متوجه اهمیت یک خط، در یک شکل هندسی هستند و می‌توانند از راهبرد کشیدن خط کمکی برای حل مسائل استفاده کنند. آن‌ها می‌توانند برای بازبینی، گامی به عقب برداشته و دورنمای خود را تغییر دهند. آن‌ها می‌توانند متوجه چیزهای پیچیده‌ای مثل برخی عبارت‌های جبری به عنوان اشیائی

واحد یا متشکل از چندین شیء بشوند. برای مثال، آن‌ها می‌توانند درک کنند که $5 - 3(x - y)^2$ برابر است با ۵ منهای یک عدد مثبت، ضرب در مجذور عددی و با استفاده از آن درک می‌کند که مقدار آن نمی‌تواند در ازای هر عدد حقیقی برای x و y بزرگ‌تر از ۵ باشد (CCSSI 2010).

استفاده و کار کردن با مثالهای حل کردنی و سوالات خودتوضیحی، سبب می‌شود دانش‌آموزان با انواع ساختار آشنا شوند. آشنایی با ساختارها به آنها کمک می‌کند بتوانند با سوالات برخورد مناسب‌تری داشته باشند و پاسخ‌های صحیح‌تری را ارائه کنند. این رویکرد از آن جهت که بر درک دانش‌آموزان تأکید دارد باعث می‌شود آنها ساختارهای متفاوت در مسائل مختلف را به خوبی تشخیص دهند.

هشتمین استاندارد، جستجو برای یافتن قاعده تکراری مسئله و استدلال آنها

دانش‌آموزان متبحر در ریاضی متوجه تکرار در محاسبات می‌شوند و در این میان، هم به دنبال روش‌های عمومی و هم به دنبال روش‌های میانبر می‌گردند. دانش‌آموزان مقطع ابتدایی که در سطح بالاتری قرار دارند متوجه می‌شوند که اگر ۲۵ تقسیم بر ۱۱ شود، باید این محاسبه را بارها و بارها تکرار کنند و نتیجه می‌گیرند که یک قسمت اعشاری در حال تکرار دارد.

دانش‌آموزان دوره متوسطه با توجه به محاسبه شیب، بررسی می‌کنند که آیا نقاط با مختصات (۱،۲) و با شیب ۳ روی خط قرار دارند؟ و ممکن است آن را به صورت معادله $(y - 2)/(x - 1) = 3$ خلاصه کنند. زمانی که $(x - 1)(x + 1)$ ، $(x - 1)(x^2 + x + 1)$ و $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$ را بسط می‌دهند متوجه قاعده‌ای در حذف عبارت‌ها می‌شوند و آن‌ها را به یک فرمول کلی برای جمع زدن یک مجموعه هندسی می‌رساند. دانش‌آموزان متبحر در ریاضی، در حالی که بر روی حل یک مسئله کار می‌کنند، نظارت خود بر فرآیند را حفظ کرده و در عین حال به جزئیات می‌پردازند. آن‌ها مرتباً در حال ارزیابی معقول بودن نتایجی هستند که در حین حل کردن مسئله به دست آورده‌اند (CCSSI 2010).

مثال‌های کار شده باعث بالا رفتن دقت دانش‌آموزان می‌شود. زمانی که آنها در حال پیدا کردن اشتباه همکلاسی خود و در صدد تصحیح آن هستند، متوجه قاعده‌های تکرار شونده مسائل و قاعده‌های حذف عبارت‌ها در مسائل شده و همواره در حال ارزیابی کار خود می‌باشند. این راهبرد موقعیتی را فراهم می‌کند که دانش‌آموزان بر فرآیند حل مسئله نظارت داشته باشند، به نکات مهم مسئله توجه کنند و مسائل را تعمیم دهند.

ارتباط دادن استانداردها برای تمرینات ریاضی به استانداردها برای محتوای ریاضیاتی

استانداردها برای تمرینات ریاضی، راه‌هایی را توضیح می‌دهد که در آن دانش‌آموزان هر روز با رسیدن به بلوغ و تخصص در ریاضی از سطح ابتدایی تا متوسطه باید به آن موضوعات بپردازند.

استانداردها برای محتوای ریاضی ترکیبی متعادل از رویه و ادراک هستند. دانش‌آموزانی که از موضوع، درکی ندارند ممکن است زیادی به رویه‌ها متکی شوند. بدون یک بنیان انعطاف‌پذیر، احتمال اینکه دانش‌آموزان مسئله را با انسجام ارائه دهند، نتایج را توجیه کنند، از ریاضیات در زندگی روزمره استفاده نمایند، از فناوری برای کار کردن با ریاضیات استفاده کنند، ریاضی را به درستی برای دانش‌آموزان دیگر توضیح دهند، برای بازبینی گامی به عقب بردارند یا یک رویه شناخته شده را کنار بگذارند تا یک راه میانبر پیدا کنند، کمتر می‌شود. به‌طور خلاصه، نداشتن درک درست مانع از پرداختن دانش‌آموزان به تمرینات ریاضی می‌شود.

در این رابطه، استانداردهای محتوایی که انتظاری از ادراک را تنظیم می‌کنند، نقاط تلاقی بالقوه‌ای میان استانداردها برای محتوای ریاضیاتی و استانداردها برای تمرین ریاضیات هستند. این نقاط تلاقی قرار است به سمت مفاهیم اصلی و سازنده در دروس ریاضی مدرسه که بیشتر شایسته صرف وقت، منابع، انرژی همراه با نوآوری هستند متمایل بوده و الزاماً بر بهبود کیفی متون درسی، تدریس، ارزیابی، رشد حرفه‌ای و دستاورد دانش‌آموز در ریاضیات متمرکز باشند (CCSSI 2010).

دیدگاه چند دبیر ریاضی

اگرچه تحقیقات تجربی مزایای ارائه مثال‌های کار شده و سوالات خودتوضیحی را برای دانش‌آموزان دوره متوسطه اول نشان داده است (اتکینسون و همکاران، ۲۰۰۰، کلارک، نگوین و سولر، ۲۰۱۱، بوث و همکاران، ۲۰۱۳، فانتشو و وانگمو، ۲۰۲۳). بررسی دیدگاه معلمان نیز می‌تواند به همان اندازه ارزشمند باشد. به همین دلیل مصاحبه‌ای از ۱۴ نفر از دبیران ریاضی دوره اول متوسطه شهرستان بهبهان در مورد مزایای استفاده از مثال‌های کار شده، ترتیب داده شد. به بیان چهار دیدگاه دبیران شرکت‌کننده در تحقیق اشاره می‌شود:

طرح این سوالات برای تدریس هر چه بهتر در کلاس انجام می‌شود و نوعی سنجش برای تدریس محسوب می‌شود و هدف آن اشاره به بدفهمی‌ها و اشتباهات رایج دانش‌آموزان می‌باشد. یکی دیگر از اهداف طرح اینگونه سوالات، ایجاد گفتمان کلاسی، نظرخواهی از دانش‌آموزان و ایجاد فضای نقد و بررسی در کلاس است تا در میان این مکالمه‌ها معلم، متوجه بدفهمی‌های دانش‌آموزان شده و در صدد رفع آنها برآید. همینطور دانش‌آموزان با مقایسه راه‌حلهای یکدیگر متوجه پاسخ درست شوند.

مثال‌های کار شده در واقع گاهی اوقات نمونه‌هایی هستند که واقعاً برای نشان دادن دانش‌آموزان مناسب هستند. مثال‌های کار شده اغلب بهترین ابزار یادگیری هستند. دانش‌آموزان را مجبور می‌کند که بگویند، "خب، این کاری است که من انجام می‌دهم و به نتیجه نرسیدم، پس برای حل سوال باید چه کار کنم؟ اگر من در این سوال همان کاری را انجام می‌دهم که حل‌کننده‌ی قبلی مساله انجام داده، چه اشکالی ممکن است پیش آید؟"

یکی از دبیران، دیدگاه دیگری را بیان می‌کند و به تاثیر همسالان اشاره می‌کند. او دریافت که استفاده از این رویکرد مزایایی دارد و می‌گوید: "من متوجه شدم که مثال‌های کار شده درست یا نادرست به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا به راحتی خود را با شخص دیگری مقایسه کنند که به این صورت دانش‌آموز متوجه می‌شود چه روشی غلط و چه روشی صحیح می‌باشد.

دبیرانی که از مثال‌های کار شده و سوالات خودتوضیحی استفاده کرده‌اند، نتایج بسیار مثبتی را گزارش کرده‌اند. مهمتر از همه، آنها می‌بینند که دانش‌آموزان، در نهایت بر مفاهیمی تسلط پیدا می‌کنند که قبلاً به دلیل تصورات غلط، مدام از آنها دوری می‌کردند. دبیر دیگری، آن را به این صورت بیان کرد:

اغلب اوقات در کلاس ریاضی، دانش‌آموز فقط به دنبال پاسخ است و به فرآیند توجهی ندارد. زمانی که کار شخص دیگری را تجزیه و تحلیل می‌کنید، شما با فرآیند سر و کار دارید، نه فقط با پاسخ. من فکر می‌کنم که مثال‌های کار شده برای دانش‌آموزان بسیار ارزشمند است!

گام‌های طراحی مثال‌های کار شده و سوالات خودتوضیحی

پنج مرحله را می‌توان برای ایجاد یک مورد مثال‌های کار شده و سوالات خودتوضیحی استفاده کرد.

گام ۱

هدف را مشخص کنید. به اشتباهات و بدفهمی‌هایی که دانش‌آموزان در حل مسائل مرتبط با هدف تعیین شده، مرتکب شده‌اند فکر کنید و چند بدفهمی رایج مرتبط با این هدف را فهرست کنید. مشابه زمانیکه در حال نوشتن طرح درس هستید.

به عنوان مثال: دانش‌آموزان قادر خواهند بود چند جمله متشابه را با هم جمع کرده و عبارت‌ها را ساده کنند.

گام ۲

برای هر مثالی که طرح می‌کنید، یک بدفهمی را بگنجانید. هدف این است که توجه دانش‌آموزان را در یک زمان بر یک جنبه از مسئله متمرکز کنیم.

مثلاً مثال مطرح شده بر این هدف متمرکز باشد که هنگام مرتب کردن عبارت‌ها، باید علامت منفی را با عبارت وارد کنید.

مرحله ۳

مثال کار شده را با استفاده از بدفهمی مورد نظر طرح کنید و راه حل آنرا بنویسید. مثال کار شده می‌تواند با پاسخ درست یا نادرست طراحی شود، اما به وضوح مسئله را برای دانش‌آموز به عنوان مسئله‌ای با پاسخ درست یا نادرست مشخص کنید. همچنین به گونه‌ای عمل کنید که گویی یک دانش‌آموز ساختگی آن مثال را حل کرده است، زیرا موجب ارتباط بهتر بین دانش‌آموز ساختگی و دانش‌آموزی که در حال تکمیل مسئله است، می‌شود و فکر می‌کند این بدفهمی و اشتباه، واقعا بین دانش‌آموزان رایج است. برای اینکار می‌توان از نام دانش‌آموزان خود یا نام کلاس استفاده کنید و مشخص کنید چه کسی، چه مثالی را تکمیل کند و پاسخ صحیح را بنویسد.

گام ۴

با تمرکز بر بدفهمی مورد نظر، سوالات خودتوضیحی را بنویسید. این گام پیچیده‌ترین بخش از فرآیند است. با طرح چند سوال از دانش‌آموز، به طور خاص، در مورد تصورات غلط دانش‌آموز ساختگی و کارهایی که در حین حل مسئله انجام داده است، پرسیده می‌شود. از پرسیدن سؤالاتی که با «چه» آغاز می‌شوند، خودداری کنید. مانند: سوال چه اشکالی دارد؟ چه اشتباهی مرتکب شد؟ پاسخ صحیح چیست؟ در عوض، روی سؤالاتی که با «چرا» آغاز می‌شوند، تمرکز کنید. زیرا این نوع سوالات از دانش‌آموزان می‌خواهد استدلال خود را توضیح دهند، نه اینکه فقط روش کار را بیان کنند. مهم است که توجه دانش‌آموزان را به ویژگی‌های مسئله‌ای که فکر می‌کنید مهم هستند جلب کنید. به عبارت دیگر، توجه آنها را به بدفهمی که در گام ۲ انتخاب کرده اید، جلب کنید.



در شکل ۲ اگرچه از دانش‌آموز سؤالی پرسیده شده است که با «چه» آغاز می‌شود، اما با سؤالی همراه شده که دانش‌آموز را وادار می‌کند تا استدلال خود را توضیح دهد و این نکته بسیار مهم است. پرسیدن سؤالات رویه‌ای خوب است، اما باید سعی شود با یک سؤال مفهومی همراه شود. بدین صورت زمانی که از دانش‌آموزان خواسته می‌شود مفهوم را توضیح دهند، دستاوردهای یادگیری بیشتری را کسب می‌نمایند.

مرحله ۵

یک مسئله تمرینی از مثال کار شده طرح کنید. سوال را به دانش‌آموزان بدهید تا ضمن مطالعه مثال کار شده و پاسخ دادن به درخواست‌های توضیحی، آن را تکمیل کنند. به این صورت فرصت تمرین کردن به دانش‌آموز داده می‌شود و همچنین اطلاعات جدیدی در مورد بدفهمی‌های خود بدست می‌آورد. در ادامه نمونه‌ای از یک مثال کار شده و سوالات خودتوضیحی آورده می‌شود که گام‌های بیان شده در آن اعمال شده است.

چند ویژگی مهم آن عبارتند از:

۱. علامت گذاری مثال: حتماً مثال را به عنوان صحیح یا نادرست علامت گذاری کنید. صراحتاً این مثال به عنوان صحیح علامت گذاری شده است.

۲. استفاده از دانش آموز ساختگی: امیرعباس این مسئله را تکمیل کرد.

۳. انتخاب هدف طبق اشتباهات و بدفهمی های دانش آموزان: بسیاری از بدفهمی ها با یک مسئله خاص مرتبط هستند، مطمئن شوید که در هر زمان فقط روی یک بدفهمی تمرکز کنید. در این مثال، خطای رایج انتخاب نکردن عدد مناسب برای ضرب هر دو طرف یا ضرب نکردن همه عبارت های معادله را هدف قرار داده است.

۴. استدلال را توضیح دهید: دانش آموزان را ترغیب کنید تا استدلال خود را توضیح دهند. در واقع، زمانی که از دانش آموزان خواسته می شود مفهوم مطلبی را توضیح دهند، دستاوردهای یادگیری بیشتری کسب می کنند. به عنوان مثال، هنگامی که از دانش آموزان پرسیده شد: "به نظر شما چرا امیرعباس به جای کم کردن ۶ از هر دو طرف، همه عبارت های معادله را در ۳ ضرب کرد؟" آنها اینگونه پاسخ دادند:

- حذف مخرج ها، زیرا در این صورت حل معادله پیچیده تر خواهد شد.
- چون می توانیم از شر کسرها خلاص شویم.
- برای خلاص شدن از مخرج.

این سوال خودتوضیحی برای برجسته کردن امکان راهبردهای اضافی برای حل مسئله می باشد.

۵. مسئله ای به عنوان تمرین: در نهایت، به دانش آموزان اجازه دهید تا برای تمرین و افزایش مهارت، مسئله ای مشابه را تکمیل کنند.

همانطور که اشاره شد، نوشتن سوالات خود توضیحی دشوارترین بخش فرآیند است و همچنین مهم ترین مؤلفه در ایجاد مسئله ای است که به بدفهمی دانش آموزان رسیدگی می کند. چند نمونه از سوالات خودتوضیحی برای کمک به شروع کار معرفی می گردد. اگرچه پرسیدن این سوالات پیشنهاد می شود، اما حتماً از دانش آموزان بخواهید که استدلال خود را توضیح دهند و یا توجیه کنند.

نمونه ای از سوالات خودتوضیحی:

۱. چرا _____ در پاسخ گنجانده نشده است؟
۲. [نام دانش آموز] _____ به عنوان اولین قدم چه کاری انجام داده است؟
۳. [نام دانش آموز] باید با _____ چه می کرد؟
۴. آیا انجام دادن _____ خوب بود؟ چرا بله و چرا نه؟
۵. چرا [نام دانش آموز] _____ و _____ را ترکیب کرد؟
۶. چرا [نام دانش آموز] ابتدا _____ سپس _____ را انجام داد؟

۷. آیا _____ همان عبارت _____ است؟ توضیح بده.
۸. اگر [نام دانش آموز] ابتدا _____ را انجام می داد، آیا [نام دانش آموز] همان پاسخ را بدست می آورد؟
۹. چرا [نام دانش آموز] _____ را به _____ تغییر داد؟
۱۰. توضیح دهید که چرا _____ پاسخی غیرمنطقی بود.
۱۱. چگونه [نام دانش آموز] می توانست بفهمد که پاسخ او منطقی نیست؟
۱۲. [نام دانش آموز] چگونه باید بفهمد که _____ برابر با _____ نیست؟
۱۳. _____ در این مسئله چه چیزی را نشان می دهد؟
۱۴. _____ چگونه بر معادله تأثیر گذاشت؟
۱۵. چرا [نام دانش آموز] دو طرف معادله را _____ ؟

بحث و نتیجه گیری

ریاضیات بر حسب ساختار گسترده ای که دارد، بستر مناسبی برای بروز دسته ای از بدفهمی ها در فرایند تدریس است که منجر به بروز مشکلات جدی در یادگیری ریاضیات می شود. بدون تردید شناخت بدفهمی ها و ریشه های ایجاد آنها با رشد تفکر و بصیرت ریاضی می تواند موجب ارتقاء یادگیری گردد (کریم زاده و عباسلو، ۲۰۱۷). هر جا آموزش و یادگیری در میان باشد، امکان فراگیری ناقص و نارسای برخی از مطالب و مفاهیم مورد آموزش وجود دارد؛ بنابراین بدفهمی ها و ناتوانی های ناشی از آنها اتفاق می افتد. یکی از وظایف مهم معلمان، شناسایی بدفهمی های دانش آموزان و همچنین ریشه یابی دلایل بروزشان و در نهایت ایجاد راهکارهای مؤثر برای اصلاح آنهاست (بخشعلی زاده و بروجردی، ۱۳۹۶).

مثال های کار شده همراه سوالات خودتوضیحی، به عنوان یک راهبرد جدید برای درک بهتر و پیشرفت دانش آموزان در مبحث جبر و معادله، به ویژه برای دانش آموزانی که در طول زمان دارای تصورات غلط مداوم بوده اند، مفید می باشد. معلمان زمانی بیشترین موفقیت را خواهند یافت که اشتباهات و باورهای نادرست دانش آموزان خود را هدف قرار داده و با طرح و ایجاد مثال های متفاوت بتوانند در درک مؤلفه های اساسی جبر به موفقیت دست یابند و به دانش آموزان کمک کنند تا رویه های نادرست را تشخیص داده و به تفاوت بین آنها فکر کنند. این رویکرد به عنوان یکی از غنی ترین شیوه های ساخت مهارت های شناختی، سبب افزایش یادگیری دانش آموزان و کاهش بدفهمی آنها در مفاهیم ریاضی، بخصوص مبحث جبر و معادله می گردد. برای کاهش تصورات نادرست جبری، ترکیب مثال های کار شده و سوالات خودتوضیحی و استفاده هر چه بیشتر از این مثالها در کتاب درسی پیشنهاد می گردد.

منابع

- شهرناز بخشعلی زاده، و ناصر بروجردیان. (۱۳۹۶). شناسایی بدفهمی های رایج دانش آموزان پایه چهارم ابتدایی در حوزه محتوایی هندسه و اندازه گیری و مقایسه عملکرد آن ها با میانگین عملکرد در سطح بین المللی. فصلنامه نوآوری آموزشی، شماره ۶۴.
- کریم زاده، رویا و عباسلو، مهدیه. (۱۳۹۶). نقش معلمان در اصلاح بدفهمی های ریاضی دانش آموزان. همایش علمی پژوهشی استانی راهبردها و راهکارهای ارتقاء کیفیت در آموزش و پرورش، میناب.
- کریمی کیا، خدیجه؛ امینی فر، الهه و کمالی، فرحبخش. (۱۳۹۱). اشتباهات مفهومی دانش آموزان در حل معادله درجه اول و معادله خط، چهارمین همایش ملی آموزش، تهران، ایران.

References

- Asghari N. (2014). Developing a model to enhance elementary teachers' ability to foster functional thinking and algebraic reasoning in elementary students. *CSTP*. 2014; 2(3): 141-162. Persian.
- Atkinson, R. K., S. J. Derry, A. Renkl, and D. Wortham. (2000). "Learning from Examples: Instructional Principles from the Worked Examples Research." *Review of Educational Research* 70 (2): 181-214.
- Booth, Julie L., Karin E. Lange, Kenneth R. Koedinger, and Kristie J. Newton. (2013). "Example Problems That Improve Student Learning in Algebra: Differentiating between Correct and Incorrect Examples." *Learning and Instruction* (25): 24- 34.
- Booth JL, McGinn KM, Barbieri C, Young LK. Misconceptions and learning algebra. and the rest is just algebra. 2017:63-78.
- Clark, Ruth C., Frank Nguyen, and John Sweller. 2011. *Efficiency in Learning: Evidence-based Guidelines to Manage Cognitive Load*. New York: John Wiley & Sons.
- Jackson, L. M. (2019). *The psychology of prejudice: From attitudes to social action* (2nd ed.). American Psychological Association
- Mulungye MM, O'Connor M, Ndethiu S. Sources of student errors and misconceptions in algebra and effectiveness of classroom practice remediation in Machakos County- Kenya. *Journal of Education and Practice*. 2016;7(10): 31-33.
- Ntsohi, M. M. E. (2005). *An Investigation into the Problems Encountered by Learners and Teachers of Grade 9 Algebra on Understanding Linear Equations: A Critical Analysis*. MA Thesis. accessed 03/02/2012, <http://uir.unisa.ac.za/bitstream/handle/10500/2509/00front.pdf?sequence=1>.
- Ojose B. Students' misconceptions in mathematics: Analysis of remedies and what research says. *Ohio Journal of School Mathematics*. 2015;(72):30-34.
- Özkan, E. M. (2011). *Misconceptions in Radicals in High School*.
- Phuntsho.D, Wangmo.W; Investigating Misconceptions in Linear Equations and its Impact on Students' Achievement at Middle Secondary Schools of Bhutan.(2023) *Asian J. Educ. Soc. Stud.*, vol. 47, no. 1, pp. 1-14, 2023; Article no.AJESS.102185.
- Star, Jon R., and Bethany Rittle-Johnson. 2009. "Making Algebra Work: Instructional Strategies That Deepen Student Understanding, within and between Algebraic Representations." *ERS Spectrum* 27 (2): 11-18.
- Tossavainen, T., Attorps, I., & Vaisanen, P. (2011). On Mathematics Students Understanding of the Equation Concept. *Journal of Mathematical Education*, 6 (2), 127-147.