



ORIGINAL RESEARCH PAPER

Common misunderstandings in the concept of slope

Mahsa Ezzati¹, Elham Samadi², Nadereh Abdi Sabouhi *³¹ Department of Mathematics, Farhangian University, Tehran, Iran.² Department of Mathematics, Farhangian University, Tehran, Iran.³ Department of Mathematics, Farhangian University, Tehran, Iran.

ABSTRACT

Keywords

slope
line equation
Function
misunderstanding

1 .Corresponding author
✉ naabdi@cfu.ac.ir

Received: 2024/06/27

Reviewed: 2024/07/31

Accepted: 2024/08/03

Background and Objectives: Concept of Slope is an important part of school mathematics and it is presented in different ways in educational levels; Geometrically in diagrams, algebraically in formulas and equations, trigonometrically, it is examined as the tangent of an angle, etc. In the upcoming research, we will examine the misunderstandings of the slope. **Methods:** The statistical population of the current research is female students of the 10th grade of mathematics and experimental field. A sample of 234 people was randomly selected from the statistical population. This research was conducted in the academic year of 1402-1403 in the 2nd, 3rd, and 5th districts of Tabriz. In order to collect information, a questionnaire containing 11 questions was used that was consistent with the main purpose of the research. The method of data analysis in this research is qualitative analysis. **Findings:** According to the results obtained in this research, 15 codes were considered to summarize the results and misunderstandings related to the concept of slope. The questionnaire was examined question by question; And the results of each question are presented based on the frequency and percentage in the table for each question. **Conclusion:** According to the results, 8.42% of the students do not have a correct understanding of the line $x=2$ and do not consider this equation as a line. In 54.5% of the research questions, students made mistakes in translating words, symbols, tables or diagrams to each other; Therefore, the dominant systematic errors in this research are incorrect translations.

ISSN (Online): 2783- 4379

DOI: [10.48310/rme.2024.16595.1087](https://doi.org/10.48310/rme.2024.16595.1087)

Citation (APA): Ezzati, M. , Samadi, E. and Abdi Sobouhi, N. (2024). Common misunderstandings in the concept of slope. *Research in Mathematics Education*, 4 (2), 11- 29 .
 <https://doi.org/10.48310/rme.2024.16595.1087>



بدفهمی‌های رایج در مفهوم شیب

مقاله پژوهشی / مروری

مهسا عزتی^۱، الهام صمدی^۲، نادره عبدی سبوحی^{۳*}

۱ دانشجوی کارشناسی، رشته آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران.

۲ دانشجوی کارشناسی، رشته آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران.

۳ گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران.

چکیده

پیشینه و اهداف: مفهوم شیب، بخش مهمی از ریاضیات مدرسه‌ای را تشکیل می‌دهد و به صورت‌های مختلف در پایه‌های تحصیلی مطرح می‌شود؛ از نظر هندسی در نمودارها، از نظر جبری در فرمول‌ها و معادلات، از نظر مثلثاتی به عنوان مماس یک زاویه و ... بررسی می‌شود. در پژوهش پیش‌رو به بررسی بدفهمی‌های شیب خواهیم پرداخت. **روش‌ها** جامعه آماری پژوهش حاضر، دانش‌آموزان دختر پایه دهم رشته ریاضی و تجربی می‌باشد. از بین جامعه آماری، نمونه‌ای با حجم ۲۳۴ نفر به روش تصادفی انتخاب شده‌اند. این تحقیق در سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ در نواحی ۵ و ۳ تبریز انجام شده است. به منظور جمع‌آوری اطلاعات، پرسشنامه‌ای شامل ۱۱ سوال که منطبق با هدف اصلی پژوهش بود استفاده شد. روش تجزیه و تحلیل داده‌ها در این پژوهش، تحلیل کیفی است. **یافته‌ها:** با توجه به نتایج حاصل در این پژوهش، ۱۵ کد برای جمع‌بندی نتایج و بدفهمی‌های مربوط به مفهوم شیب در نظر گرفته شد. پرسشنامه به صورت سوال به سوال بررسی شد و نتایج هر سوال بر اساس فراوانی و درصد در جدول مربوط به هر سوال ارائه شده است. همچنین برای کدهای مربوط به هر سوال، تحلیل و تفسیر هر کد در جدول بعدی تشریح شده است. **نتیجه‌گیری:** با توجه به نتایج حاصل، ۸۴٪ از دانش‌آموزان فهم درستی از خط $x=2$ ندارند و این معادله را به عنوان خط در نظر نمی‌گیرند. در ۵۴٫۵ درصد از سوالات پژوهش، دانش‌آموزان در ترجمه واژگان، نمادها، جداول یا نمودارها به یکدیگر اشتباه کرده‌اند؛ بنابراین خطاهای نظام‌مند غالب در این پژوهش، از نوع ترجمه نادرست می‌باشند.

از دستگاه خود برای اسکن و خواندن مقاله به صورت آنلاین استفاده کنید.

واژه‌های کلیدی

شیب
معادله خط
تابع
بدفهمی

۱. نویسنده مسئول
naabdi@cfu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۴/۰۷

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۰۵/۱۰

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۵/۱۳

شماره صفحات: ۱۱-۲۹

DOI: [10.48310/rme.2024.16595.1087](https://doi.org/10.48310/rme.2024.16595.1087)

شابا الکترونیکی: ۴۳۷۹-۲۷۸۳

OPRYRIGHTS



©2024 The author(s). This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, as long as the original authors and source are cited. No permission is required from the authors or the publishers.

مقدمه

رنه دکارت^۱ در بین فلاسفه، فیلسوف بزرگ و در میان ریاضیدانان، یک ریاضیدان بزرگ بود. بزرگ‌ترین دستاورد ریاضی او، کشف دستگاه‌های مختصات و کاربرد آن در مسائل هندسه بود و از زمان او هندسه و جبر به موازات هم پیش رفتند. پیدایش دستگاه مختصات، پایه پیدایش حساب دیفرانسیل و انتگرال توسط نیوتن^۲ و لایبنیس^۳ شد. حساب دیفرانسیل شاخه‌ای از علم ریاضیات است که به ما در نوشتن معادله خط مماس بر نقطه‌ای از منحنی که رسم مماس در آن نقطه امکان‌پذیر است، کمک می‌کند. برای محاسبه معادله خط مماس بر منحنی در یک نقطه، نیاز داریم که تانژانت زاویه‌ای که خط مماس بر منحنی در آن نقطه با جهت مثبت محور X ها می‌سازد را محاسبه کنیم؛ عدد مذکور همان شیب منحنی در نقطه متناظر خواهد بود. براساس نظر لوید^۴ و همکاران او، توابع خطی، از جمله توابعی هستند که هم نقش مهمی در ریاضیات دارند و هم ایده‌ای پیچیده و چندوجهی دارند، که قدرت و کثرت آن‌ها تقریباً در تمام ریاضیات نفوذ کرده است. با این توصیف، مفهوم شیب نشان‌دهنده نرخ تغییر در یک متغیر است که از تغییر در متغیر دیگر ایجاد می‌شود. مفهوم شیب نه تنها برای مطالعه توابع خطی در جبر اولیه، یک مفهوم مهمی است؛ بلکه برای توصیف توابع غیرخطی در جبر پیشرفته، نیز به کار می‌رود (Nagle & Russo, 2014). در معادله خط زیر

$$y = ax + b$$

a شیب خط می‌باشد. لازم به توضیح است که شیب توابع خطی قابل نشان دادن نیستند. سوالی که مطرح می‌شود این است که آیا دانش‌آموز می‌تواند بین این بازنمایی‌های مختلف در تجسم معادله خط با مفهوم شیب توابع خطی رابطه برقرار کند؟ شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا^۵ بازنمایی را به‌عنوان یکی از استانداردهای فرآیندی آموزش ریاضیات مدرسه‌ای معرفی می‌نمایند. مفهوم شیب خط یک بحث شهودی در ریاضیات مدرسه‌ای است که به‌صورت‌های مختلف در پایه‌های متوسطه تحصیلی مطرح می‌شود؛ از نظر هندسی در نمودارها، از نظر جبری در فرمول‌ها و معادلات و از نظر مثلثاتی به‌عنوان تانژانت زاویه بررسی می‌شود. علاوه بر این، در دنیای واقعی نیز همواره دانش‌آموزان با مفهوم شیب سروکار دارند؛ مانند جاده‌های کوهستانی، پیست اسکی و... . برای یاددهی و یادگیری مفاهیم ریاضی، باید معلم و فراگیر به دو دانش مفهومی و رویه‌ای مجهز باشند؛ به‌طوری‌که در کنار درک مفهومی، دانش رویه‌ای شامل مهارت‌های حرفه‌ای نیز، لحاظ شود. البته نباید برای دانش رویه‌ای بیش از درک مفهومی اهمیت قائل شد. به عنوان مثال اگر فراگیری بتواند محاسبات مربوط به شیب توابع خطی را انجام دهد، ولی هنوز نداند چرا محاسبات جبری برای تعیین شیب توابع خطی را از روی فرمول انجام می‌دهد، می‌توان نتیجه گرفت که وی، در درک ارتباط بین قواعد و رویه‌هایی که در آن‌ها خبره شده و معانی مربوط به آن‌ها ضعیف است.

دو دانش مفهومی و رویه‌ای در واقع با هم، دانش موضوعی را تشکیل می‌دهند و معلمی موفق است که از دانش موضوعی برخوردار باشد. در این صورت دانش‌آموز در مواجهه با سوالات مرتبط با شیب، دچار بدفهمی‌های رایج نخواهد شد. با توجه به (Rittle & Schneider, 2012) دانش مفهومی و رویه‌ای رابطه دوسویه با یکدیگر دارند؛ به‌گونه‌ای که اشتباهات رویه‌ای ممکن است به دلیل درک ضعیف از مفهوم مربوطه باشد و بالعکس. همچنین در (Zaya, 2017) اشاره شده است که دانش رویه‌ای و مفهومی از بسیاری جهات مشابه هستند و همین امر تمایز این دو را از هم دشوار می‌کند. دانش رویه‌ای، به کارگیری پویا و موفق از قوانین، الگوریتم‌ها یا رویه‌های خاص را در قالب‌های ارائه متناسب با آن‌ها مشخص می‌کند (Reihani & et al., 2018). بارودی^۶ (۲۰۰۷)، دانش مفهومی را به‌عنوان دانشی درباره حقایق

¹ René Descartes

² Newton

³ Leibniz

⁴ Lloyd

⁵ National Council of Teachers of Mathematics

⁶ Baroody

(تعمیم‌ها) و اصول تعریف می‌کند (Barrody & et al., 2007). اشتباهاتی که دانش‌آموز در درک و استفاده از شیب توابع خطی دارد، به دلیل نقص در دانش مفهومی و رویه‌ای آن می‌باشد. در مورد مفهوم شیب، دانش رویه‌ای شامل نمادها و قوانین حاکم بر آن است؛ همچنین دانش مفهومی باعث می‌شود، دانش‌آموز قادر به توضیح چرایی رویه‌های مختلف باشد و بتواند بین مفاهیم مختلف شیب، رابطه برقرار کند.

هیل و همکاران (۲۰۰۸)^۱ معتقد هستند که، معلمان ریاضی باید در چهار مقوله اصلی، شامل اشتباهات متداول دانش‌آموزان؛ فهم دانش‌آموزان از محتوا؛ توالی رشد دانش‌آموزان و استراتژی‌های متداول محاسباتی دانش‌آموزان، دانش کافی داشته باشند. پژوهشگران ریاضی برای بهبود فرآیند یادگیری، اشتباهات رایج در مفاهیم مختلف ریاضی را به دو دسته تقسیم کرده‌اند:

۱- خطاهای محاسباتی و بی‌دقتی، که نظام‌مند (قابل پیش‌بینی) نیستند و ما عنوان «اشتباه» را به آن‌ها اختصاص می‌دهیم. اشتباهات، معمولاً خطاهایی هستند که در اثر بی‌دقتی رخ می‌دهند. هنگامی که معلم از دانش‌آموز می‌خواهد پاسخ‌هایش را بیازماید یا مجدداً محاسباتش را بررسی کند، چنانچه دانش‌آموز مفهوم تدریس شده را به‌خوبی درک کرده باشد، متوجه آن اشتباه خواهد شد.

۲- خطاهای نظام‌مند که تحت عنوان «بدفهمی» شناخته می‌شوند. آلن^۲ (۲۰۰۷) بدفهمی را یک ایده یا نظر اشتباه می‌داند که از درک نادرست بعضی چیزها حاصل می‌شود (Allen, 2007). باتل^۳ در (Bottel, 2010) نیز چنین بیان می‌دارد: بدفهمی ناشی از این است که دانش‌آموز، مطلب را درک نکرده یا به غلط درک کرده است. در واقع این خطاها ناشی از بی‌دقتی یا بی‌توجهی به فعالیت هستند و ریشه‌های عمیق‌تری دارند. بدفهمی دانش‌آموزان ممکن است از تجربیات و دانسته‌های پیشین آن‌ها در زندگی روزمره نشأت بگیرد و به‌طور جدی توسط دانش‌آموزان حفظ شود و نتایج حاصل از آن‌ها، یادگیری را به تاخیر اندازد. گرابر و جانسون (۱۹۹۱) بدفهمی‌های این نوع را در ۴ گروه دسته‌بندی می‌کنند:

- بیش‌تعمیمی: دانش‌آموز مفهوم یا رویه‌ای را که در یک وضعیت درست است، به وضعیتی دیگر تعمیم می‌دهد.

- بیش تخصیصی: دانش‌آموز محدودیتی را که ویژگی یک مفهوم، یا رویه نیست، به آن نسبت می‌دهد.

- ترجمه نادرست: دانش‌آموز در ترجمه واژگان، نمادها، جداول یا نمودارها به یکدیگر اشتباه می‌کند.

- مفهوم‌سازی محدود: ریشه بدفهمی دانش‌آموز به عدم درک مفهوم یا رویه برمی‌گردد.

غالباً بدفهمی یک تفکر غلط نیست، بلکه یک مفهوم در مرحله ابتدایی است که توسط دانش‌آموز ساخته شده است. لازم به ذکر است که بدفهمی به‌طور مستقل وجود ندارد و در یک چارچوب مفهومی خاص بروز می‌کند. بدفهمی‌ها می‌توانند با تغییرات چارچوب تغییر کنند یا ناپدید شوند. لذا یکی از اهداف کلیدی در اصلاح بدفهمی‌های ریاضیات و علوم، تغییر چارچوب مفهومی دانش‌آموزان است (Donald, 2007). اولیویر معتقد است اشتباهات و بدفهمی‌ها نتیجه طبیعی تلاش دانش‌آموزان برای ساختن دانش خویش است (Stump, 1996). روسو و همکارانش^۴ مفهوم‌سازی شیب ارائه شده توسط استامپ (۲۰۱۱) را اصلاح و گسترش دادند که منجر به ۱۱ مفهوم‌سازی از شیب شده است.

¹ Hill

² Allen

³ Batel

⁴ Roso

جدول ۱: ۱۱ مفهوم شیب

مفهوم	شیب به عنوان
نسبت هندسی	نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی افقی نمودار یک خط.
نسبت جبری	تغییرات y نسبت به تغییرات x .
ویژگی فیزیکی	ویژگی خط اغلب با عبارات توصیف می‌شود؛ مانند: شیب، مایل، زاویه میل، چقدر بالا می‌رود و ...
ویژگی تابعی	نرخ ثابت تغییر بین متغیرها
ضریب پارامتری	ضریب x در معادله $y = ax + c$
مفهوم مثلثاتی	تانژانت زاویه بین میل یک خط با مولفه طول‌ها
مفهوم حساب دیفرانسیل و انتگرال	حد. مشتق. خط مماس بر یک منحنی در یک نقطه
موقعیت دنیای واقعی	موقعیت ایستا، فیزیکی، پویا یا تابعی (مانند: سطح شیب دار ویلچر، فاصله در مقابل زمان و...)
ویژگی تعیین کننده	خاصیتی که تعیین می‌کند دو خط بر هم عمود باشند یا خیر؟ اگر یک نقطه نیز داده شود، ویژگی‌ای است که می‌تواند یک خط را تعیین کند.
شاخص رفتار	عدد واقعی با علامتی که نشان‌دهنده روندهای افزایشی (+)، روندهای کاهش (-) و افقی (۰) یک خط است.
ثابت خطی	ویژگی ثابت و منحصر به فرد برای شکل‌های راست (مستقیم).

پیشینه پژوهش

پژوهش (Walter & Gerson, 2007) نشان می‌دهد مهارت‌های رویه‌ای زیادی برای دانش‌آموزان لازم است تا با مفهوم‌سازی‌های مختلف شیب کار کنند. همچنین اشتباهات محاسباتی بدون توجه به کلاس ثبت نام دانش‌آموز، رایج‌ترین اشتباهات بودند. یکی از مهم‌ترین اشتباهات دانش‌آموزان در تبدیل معادله تابع خطی به فرم استاندارد آن و تشخیص شیب تابع خطی مورد نظر می‌باشد.

نتایج پژوهش (Birgin, 2012) نیز نشان داد که بسیاری از دانش‌آموزان پایه هشتم درک محدودی از حالت‌های نمایش شیب یک تابع خطی دارند. درک آن‌ها از شیب صرفاً به حالت جبری محدود شده بود، در حالی که در تغییر از حالت جبری به هندسی در بازنمایی مفهوم شیب تابع خطی، ضعف دارند.

روش

روش پژوهش حاضر، روش توصیفی است. این تحقیق بر اساس درک و فهم از شیب تابع خطی و بدفهمی‌های دانش‌آموزان پایه دهم رشته ریاضی و تجربی سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ نواحی ۲ و ۳ و تبریز انجام شده است که در زمان انجام پژوهش در حال تحصیل بودند. از بین جامعه آماری، نمونه‌ای با حجم ۲۳۴ نفر به روش تصادفی انتخاب شده است. همچنین نمونه از بین دانش‌آموزان دختری که این مبحث را یاد گرفته بودند، انتخاب شد. به منظور جمع‌آوری اطلاعات، پرسشنامه‌ای شامل ۱۱ سوال که منطبق با هدف اصلی پژوهش، یعنی بررسی درک و فهم دانش‌آموزان از شیب توابع خطی و بدفهمی‌های آن است، استفاده شد. پس از بررسی و تجزیه و تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان، برخی از سؤالات پرسشنامه اصلاح شدند و بعد از ویرایش نهایی، پرسشنامه‌هایی با ۱۱ سؤال که در زمینه «درک و تصور دانش‌آموزان از مفهوم شیب توابع خطی» بود، آماده و بین دانش‌آموزان توزیع شد. این تحقیق در طول ۱ ماه انجام شد و پرسشنامه‌ها توسط محققان با حضور در مدارس در بین دانش‌آموزان توزیع شدند. روش تجزیه و تحلیل داده‌ها در این پژوهش، تحلیل کیفی است. با توجه به نتایج حاصل، ۱۵ کد زیر جهت بررسی بدفهمی‌های رایج بین دانش‌آموزان در نظر گرفته شدند.

جدول ۲: کدهای در نظر گرفته شده

کد	نوع
۱	اشکال در فرمول شیب ($a = \frac{y_1 - x_1}{y_2 - x_2}$ و $a = \frac{x_2 - x_1}{y_1 - y_2}$...)
۲	اشتباه در تعیین جهت شیب
۳	عدم توانایی رسم خط
۴	عدم درک مفهوم شیب تعریف نشده و شیب صفر
۵	عدم توانایی تبدیل معادله تابع خطی به فرم استاندارد و تشخیص اجزای آن
۶	نداشتن درک درست از a و b در معادله تابع خطی و جابه‌جا نوشتن آنها
۷	عدم جایگذاری درست در فرمول معادله تابع خطی و ناقص نوشتن آن
۸	اشکال محاسباتی
۹	عدم درک رابطه نسبت‌های مثلثاتی با شیب
۱۰	عدم تشخیص زاویه درست برای تعیین شیب
۱۱	عدم توانایی توصیف مفهوم شیب نمودار در جمله
۱۲	عدم درک رابطه بین شیب دوخط موازی و عمود و...
۱۳	بیان ax به جای a به عنوان شیب خط
۱۴	ننوشتن جواب یا جواب کاملاً بی ربط به سوال
۱۵	عدم درک رابطه بین شیب دوخط موازی و عمود و... (در نظر گرفتن x به جای y و...)

یافته‌ها

در این قسمت با بررسی پاسخ‌های ارائه شده توسط دانش‌آموزان به سؤالات پرسشنامه، اطلاعات جمع‌آوری شده در خصوص اهداف پژوهش ارائه می‌شود. در این بخش پاسخ‌های دانش‌آموزان بدون دخل و تصرف با کدهای فوق‌الذکر، در قالب جدول بیان و تجزیه و تحلیل می‌شوند.

سوال ۱



هدف از طرح سوال، پاسخ به این پرسش است که آیا دانش‌آموز فرمول شیب را درک کرده است؟ تفاوت صورت و مخرج آن را دریافته است یا خیر؟

یافته‌های سوال اول:

درصد و بدفهمی‌ها و اشکالاتی که دانش‌آموزان در پاسخ به این سوال داشته‌اند، در جدول ۳ خلاصه شده است. همچنین تشریح پاسخ‌های داده شده در جدول ۴ قابل ملاحظه می‌باشند.

جدول ۳: نتایج سوال ۱

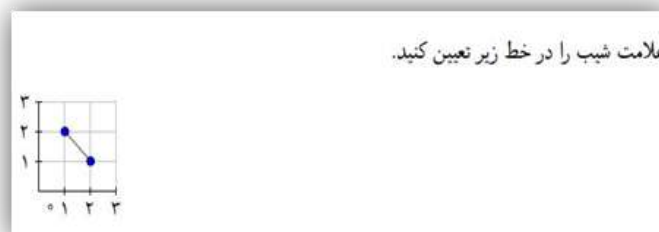
کد	تعداد	درصد	تشریح پاسخ
۱	۲۹	۱۲,۲۳	اشکال در فرمول شیب
۱۴	۴۴	۱۸,۵۶	ننوشتن جواب یا جواب کاملاً بی ربط به سوال
۱۵	۱۳	۵,۴	اشکال در تعیین مختصات نقطه
۸	۱	۰,۴۲	اشکال محاسباتی
پاسخ صحیح	۱۵۰	۶۳,۲	-----

جدول ۴: نتایج سوال ۱

تحلیل پاسخ‌ها با توجه به کد اختصاص یافته	
۱: این دسته از دانش‌آموزان فرمول شیب را به خوبی درک نکرده‌اند و فهم آن‌ها از این فرمول صرفاً به صورت حفظ و به ذهن سپاری بوده و غالباً تفاضل X ها را بر تفاضل Y ها تقسیم کرده بودند. همچنین نمونه‌هایی مانند $a = \frac{y_1 - x_1}{y_2 - x_2}$ و $a = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ به چشم می‌خورد.	
۱۴: بدیهی است که در این حالت، سوال بی پاسخ توسط دانش‌آموز رها شده یا پاسخ کاملاً بی ربط به سوال مربوطه بوده است.	
۱۵: این دسته از دانش‌آموزان غالباً جای X و Y را در تعیین مختصات یک نقطه جابه‌جا نوشته‌اند. همچنین در مواردی علامت مثبت یا منفی X و Y را درست تشخیص نداده‌اند.	
۸: این کد به پاسخ‌هایی تعلق یافته که دانش‌آموز در آن دچار اشکال محاسباتی شده است.	

این سوال با توجه به نتایج به دست آمده جزو سوالاتی است که درصد بدفهمی‌های مربوطه پایین می‌باشد و ۶۳,۲٪ دانش‌آموزان پاسخ صحیح به این سوال داده‌اند. در سوال فوق، بیشترین درصد بدفهمی، مربوط به کد ۱ می‌باشد که در دسته بدفهمی از نوع مفهوم‌سازی محدود قرار می‌گیرد.

سوال ۲



هدف از طرح این سوال، ارزیابی درک و فهم دانش‌آموز نسبت به تعیین علامت شیب از روی نمودار می‌باشد.

یافته‌های سوال دوم:

درصد هر کد و بدفهمی‌هایی که دانش‌آموزان در پاسخ به این سوال داشته‌اند، در جدول ۵ جمع‌آوری شده است. همچنین توضیحات پاسخ‌های داده شده در جدول ۶ قابل ملاحظه می‌باشند.

جدول ۵: نتایج سوال ۲

کد	تعداد	درصد	تشریح پاسخ
۲	۷۰	۲۹,۹	اشتباه در تعیین جهت شیب
۱۴	۲۰	۸,۵	ننوشتن جواب یا جواب کاملاً بی ربط به سوال
پاسخ صحیح	۱۴۴	۶۱,۵	-----

جدول ۶: نتایج سوال ۲

تحلیل پاسخ‌ها با توجه به کد اختصاص یافته
۲: دانش‌آموزان در تعیین جهت شیب با توجه به نمودار مشکل دارند. در مواردی اینگونه پاسخ داده بودند که علامت با توجه به جهت محور x ها ناحیه‌ای خواهد بود که نمودار در آن قرار گرفته است.
۱۴: بدیهی است که در این حالت، سوال بی پاسخ توسط دانش‌آموز رها شده یا پاسخ کاملاً بی ربط به سوال مربوطه بوده است.

بیشترین بدفهمی این سوال، مربوط به کد ۲، یعنی اشتباه در تعیین جهت شیب می‌باشد که در دسته بدفهمی از نوع مفهوم‌سازی محدود قرار می‌گیرد.

سوال ۳

الف) خطوط $y = 3$ و $x = 2$ را رسم کنید و شیب هر کدام از آنها را تعیین کنید.

دانش‌آموزان اغلب تصور می‌کنند که برای رسم یک خط از روی معادله آن باید ضریب x در معادله داده شده، وجود داشته باشد و صرفاً خطوطی قابل رسم هستند که معادله آنها به فرم $y = ax + b$ باشد. بنابراین هدف از طرح چنین سوالی، بررسی توانایی دانش‌آموزان در رسم خط با استفاده از معادله آن می‌باشد.

یافته‌های سوال سوم:
درصد هر کد و بدفهمی‌هایی که دانش‌آموزان در پاسخ به این سوال داشته‌اند، در جدول ۷ ارائه شده است. همچنین تشریح پاسخ‌های داده شده در جدول ۸ قابل ملاحظه می‌باشد.

جدول ۷: نتایج سوال ۳

کد	تعداد	درصد	تشریح پاسخ
۳	۱۷۴	۴۲٫۸	عدم توانایی رسم خط
۴	۱۸۴	۴۵٫۳	عدم درک مفهوم شیب تعریف نشده و شیب صفر
۱۴	۴۳	۱۰٫۵	ننوشتن جواب یا جواب کاملاً بی ربط به سوال
پاسخ صحیح	۵	۱٫۲	-----

جدول ۸: نتایج سوال ۳

تحلیل پاسخ‌ها با توجه به کد اختصاص یافته
۳: دانش‌آموز گمان می‌کند که برای رسم خط حتماً باید سمت چپ معادله متغیر y باشد و در نتیجه $x = 2$ را به عنوان خط قبول ندارد و این معادله را به عنوان یک نقطه تلقی می‌کند. همچنین از آنجایی که این معادله را به عنوان خط قبول ندارند، شیبی هم برای این خط قائل نمی‌شوند. علاوه بر این برخی دانش‌آموزان در رسم $y = 3$ هم همین مشکل را دارند و صرفاً معادله‌هایی را به عنوان خط قبول می‌کنند که در قالب معادله کلی $y = ax + b$ باشند.
۴: دانش‌آموز از جایی که معادله $x = 2$ را به عنوان خط درک نکرده است، شیب برای آن در نظر نمی‌گیرد و هیچ تصویری از خطی که شیب تعریف نشده داشته باشد، ندارد. همچنین در بعضی موارد، صفر را هم به عنوان شیب در نظر نمی‌گیرد و درک او از شیب، عدد غیر صفر می‌باشد. اگر دانش‌آموز نحوه یافتن شیب با استفاده از فرمول را به خوبی فراگرفته باشد، به راحتی می‌تواند با جایگذاری در فرمول به شیب صفر و تعریف نشده برسد.
۱۴: بدیهی است که در این حالت، سوال بی پاسخ توسط دانش‌آموز رها شده یا پاسخ کاملاً بی ربط به سوال مربوطه بوده است.

اکثر دانش‌آموزان در رسم دو خط فوق مشکل دارند و آن‌ها را به عنوان خط قبول ندارند. با توجه به نتایج به دست آمده تنها ۱۰۲٪ از دانش‌آموزان به این سوال پاسخ صحیح داده‌اند. کد ۴، یعنی عدم درک مفهوم شیب تعریف نشده و شیب صفر، بیشترین درصد خطاهای نظام‌مند را به خود اختصاص داده است و در دسته بدفهمی از نوع مفهوم‌سازی محدود قرار می‌گیرد.

سوال ۴

الف) شیب خط $y = 2x + 3$ را مشخص کنید.
 ب) شیب خط $3y + 6x = 4$ را مشخص کنید.

هدف از طرح این دو پرسش، بررسی بدفهمی‌های مربوط به مشخص کردن شیب است. به عبارت دیگر آیا دانش‌آموز توانایی تبدیل معادله خط به حالت استاندارد را دارد؟ همچنین آیا شیب را در حالت استاندارد و کلی از روی معادله به راحتی تشخیص می‌دهد؟
 یافته‌های سوال چهارم:

نتایج حاصل از بررسی پاسخ‌های داده شده به این پرسش در جدول ۹ ارائه شده است و تحلیل و بررسی بدفهمی‌های مربوطه با توجه به کد در جدول ۱۰ تشریح شده است.

جدول ۹: نتایج سوال ۴

کد	تعداد	درصد	تشریح پاسخ
۵	۶۳	۲۵،۰۹	عدم توانایی تبدیل معادله توابع خطی به فرم استاندارد و تشخیص اجزای آن
۶	۱۴	۵،۵	نداشتن درک درست از a و b در معادله توابع خطی و جابه‌جا نوشتن آنها
۸	۱۵	۵،۹	اشکال محاسباتی
۱۳	۸	۳،۱	بیان ax به جای a به عنوان شیب
۱۴	۴۶	۱۸،۳۲	ننوشتن جواب یا جواب کاملاً بی ربط به سوال
پاسخ صحیح	۱۰۵	۴۱،۸۳	-----

جدول ۱۰: نتایج سوال ۴

تحلیل پاسخ‌ها با توجه به کد اختصاص یافته
۵. دانش‌آموز در تبدیل معادله خط داده شده به معادله استاندارد ناتوان است؛ به همین جهت همواره ضریب x را در هر دو حالت به عنوان شیب در نظر می‌گیرد.
۶. در مواردی ملاحظه می‌شود که دانش‌آموز بعد از یافتن مقدار شیب، هنگام جای‌گذاری در معادله تفاوت a و b را درک نمی‌کند و شیب را به جای متغیر b قرار می‌دهد و عرض از مبدا را متغیر a در نظر می‌گیرد.
۸. این کد به پاسخ‌هایی تعلق یافته که دانش‌آموز در آن دچار اشکال محاسباتی شده است.
۱۳. دانش‌آموز هنگام بیان شیب از روی معادله خط در حالت استاندارد، به جای بیان عدد مربوط به شیب، کل عبارت $2x$ را به عنوان شیب در نظر می‌گیرد.
۱۴. بدیهی است که در این حالت، سوال بی پاسخ توسط دانش‌آموز رها شده یا پاسخ کاملاً بی ربط به سوال مربوطه بوده است.

با توجه به نتایج به دست آمده ۲۵،۰۹٪ از دانش‌آموزان شیب را بدون تبدیل معادله خط داده شده به حالت استاندارد ضریب x در نظر گرفته‌اند. بیشترین درصد بدفهمی در این سوال، به کد ۵، یعنی عدم توانایی تبدیل معادله خط به فرم استاندارد و تشخیص اجزای آن تعلق می‌گیرد و در دسته بدفهمی از نوع ترجمه نادرست قرار دارد.

سوال ۵

خطی رسم کنید که دارای شیب ۲- باشد و از نقطه (۲,۰) بگذرد.

هدف از طرح این سوال، ارزیابی توانایی دانش‌آموز و بدفهمی‌های حاصل در یافتن معادله خط با استفاده از شیب و یک نقطه معلوم از خط مذکور می‌باشد.

یافته‌های سوال پنجم: درصد هر کد و بدفهمی‌هایی که دانش‌آموزان در پاسخ به این سوال داشته‌اند، در جدول ۱۱ جمع‌آوری شده است. همچنین تشریح پاسخ‌های داده شده در جدول ۱۲ قابل ملاحظه می‌باشد.

جدول ۱۱: نتایج سوال ۵

کد	تعداد	درصد	تشریح پاسخ
۱	۱	۰,۳۵	اشکال در فرمول شیب
۳	۱۲۶	۴۴,۸	عدم توانایی رسم خط
۷	۲۷	۹,۶	عدم جایگذاری درست در فرمول معادله توابع خطی و ناقص نوشتن آن
۸	۱۲	۴,۲	اشکال محاسباتی
۱۴	۷۲	۲۵,۶	نوشتن جواب یا جواب کاملاً بی ربط به سوال
۱۵	۱۰	۳,۵	عدم درک رابطه بین شیب دوخط موازی و عمود و...
پاسخ صحیح	۳۳	۱۱,۷	-----

جدول ۱۲: نتایج سوال ۵

تحلیل پاسخ‌ها با توجه به کد اختصاص یافته
۱: این دسته از دانش‌آموزان فرمول شیب را به خوبی درک نکرده‌اند و فهم آن‌ها از این فرمول صرفاً به صورت حفظی و به ذهن سپاری بوده و غالباً تفاضل x ها را بر تفاضل y ها تقسیم کرده بودند. همچنین نمونه‌هایی مانند $a = \frac{y_1 - x_1}{y_2 - y_1}$ و $a = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ به چشم می‌خورد.
۳: دانش‌آموز در رسم خط مشکل دارد.
۶: در مواردی ملاحظه می‌شود که دانش‌آموز بعد از یافتن مقدار شیب، هنگام جای‌گذاری در معادله، تفاوت a و b را درک نمی‌کند و شیب را به جای متغیر b قرار می‌دهد و عرض از مبدا را متغیر a در نظر می‌گیرد.
۷: دانش‌آموز با یافتن شیب، سوال را رها کرده و معادله خط را ننوخته است. همچنین در مواردی ملاحظه می‌شود که وی درکی از عرض از مبدا و برابر بودن آن با b در معادله خط استاندارد ندارد.
۱۳: دانش‌آموز هنگام بیان شیب از روی معادله خط در حالت استاندارد، به جای بیان عدد مربوط به شیب، کل عبارت $2x$ را به عنوان شیب در نظر می‌گیرد.
۱۴: بدیهی است که در این حالت، سوال بی پاسخ توسط دانش‌آموز رها شده یا پاسخ کاملاً بی ربط به سوال مربوطه بوده است.
۱۵: این دسته از دانش‌آموزان غالباً جای x و y را در تعیین مختصات یک نقطه جابه‌جا نوشته‌اند. همچنین در مواردی علامت مثبت یا منفی x و y را درست تشخیص نداده‌اند.

با توجه به جدول ۱۱ مشاهده می‌شود که تنها ۱۱,۷٪ دانش‌آموزان به این سوال پاسخ درست داده‌اند. بیشترین درصد از بین کدهای اختصاص یافته، مربوط به عدم توانایی رسم خط می‌باشد. زمانی که شیب و یک نقطه از خط داده شده است، در مواردی دانش‌آموز شیب ۲- را به عنوان یک نقطه در نظر گرفته و با نقطه بعدی یک خط رسم کرده است؛ یعنی علاوه بر عدم درک مفهوم شیب، مفهوم نقطه و رسم خط با استفاده از دو نقطه را نیز عمیق یاد نگرفته

است. کد ۳، یعنی عدم توانایی رسم خط، با ۴۴,۸ درصد، بیشترین در صد خطاهای نظام‌مند در این سوال را به خود اختصاص داده است و در دسته بدفهمی از نوع ترجمه نادرست قرار می‌گیرد.

سوال ۶

معادله خطی بنویسد که از نقطه $(2, 7)$ بگذرد و بر خط $6x + 7y = 2$ عمود باشد.

دانش‌آموزان باید رابطه بین شیب دو خط عمود بر هم را با توجه به تمرینات صورت گرفته و اشارات مستقیم و غیرمستقیم در روند تدریس فراگرفته باشند. بنابراین هدف این پرسش پاسخ به این سوال است که آیا دانش‌آموز می‌تواند با استفاده از معادله خط عمود بر یک خط، معادله خط دوم را پیدا کند؟ یافته‌های سوال ششم: نتایج به دست آمده از پاسخ دانش‌آموزان در قالب درصد در جدول ۱۳ قابل ملاحظه است. همچنین در جدول ۱۴ به تشریح بدفهمی‌های هر کد پرداخته شده است.

جدول ۱۳: نتایج سوال ۶

کد	تعداد	درصد	تشریح پاسخ
۵	۱۱	۴,۰۱	عدم توانایی تبدیل معادله توابع خطی به فرم استاندارد و تشخیص اجزای آن
۷	۲۵	۹,۱	عدم جایگذاری درست در فرمول معادله توابع خطی و ناقص نوشتن آن
۸	۷	۲,۵	اشکال محاسباتی
۱۲	۸۷	۳۱,۷	عدم درک رابطه بین شیب دوخط موازی و عمود و...
۱۴	۱۳۴	۴۸,۹	ننوشتن جواب یا جواب کاملاً بی ربط به سوال
۱۵	۳	۱,۰۹	عدم درک رابطه بین شیب دوخط موازی و عمود و...
پاسخ صحیح	۷	۲,۵	-----

جدول ۱۴: نتایج سوال ۶

تحلیل پاسخ‌ها با توجه به کد اختصاص یافته
۵. دانش‌آموز در تبدیل معادله خط داده شده به معادله استاندارد، ناتوان است؛ به همین جهت همواره ضریب x را در هر دو حالت به‌عنوان شیب در نظر می‌گیرد.
۷. دانش‌آموز با یافتن شیب، سوال را رها کرده و معادله خط را ننوشته است. همچنین در مواردی ملاحظه می‌شود که وی درکی از عرض از مبدا و برابر بودن آن با b در معادله خط استاندارد ندارد.
۸. این کد به پاسخ‌هایی تعلق یافته که دانش‌آموز در آن دچار اشکال محاسباتی شده است.
۱۲. در این نوع از بدفهمی، دانش‌آموز رابطه بین شیب دو خط عمود بر هم را درک نکرده است. در مواردی ملاحظه می‌شود که تفاوتی بین شیب دو خط قائل نیست و شیب این دو خط را باهم یکسان در نظر می‌گیرد.
۱۳. دانش‌آموز هنگام بیان شیب از روی معادله خط در حالت استاندارد، به جای بین عدد مربوط به شیب، کل عبارت $2x$ را به‌عنوان شیب در نظر می‌گیرد.
۱۴. بدیهی است که در این حالت، سوال بی پاسخ توسط دانش‌آموز رها شده یا پاسخ کاملاً بی ربط به سوال مربوطه بوده است.
۱۵. این دسته از دانش‌آموزان غالباً جای x و y را در تعیین مختصات یک نقطه جا به جا نوشته‌اند. همچنین در مواردی علامت مثبت یا منفی x و y را درست تشخیص نداده‌اند.

بیشترین درصد بدفهمی، مربوط به رابطه بین شیب دو خط عمود است و این نوع بدفهمی در دسته ترجمه نادرست قرار می‌گیرد. در غالب موارد دانش‌آموزان شیب این دو خط را یکسان در نظر گرفته‌اند.

سوال ۷

معادله خطی بنویسید که زاویه آن با جهت مثبت محور x ها 30° درجه باشد و از نقطه $(1, 0)$ بگذرد.

در پایه نهم دانش‌آموزان شیب را با استفاده از فرمول به راحتی می‌توانند محاسبه کنند. در پایه دهم روش دومی برای تعیین شیب مطرح می‌شود که رابطه بین $\tan$ و شیب خط است. بنابراین اولین هدف از طرح چنین سوالی پاسخ به این پرسش است که آیا دانش‌آموز این رابطه را به درستی درک کرده است؟ یافته‌های سوال هفتم:

درصدهای مربوط به هر کد در جدول ۱۵ به ترتیب قرار داده شده است. همچنین تشریح و تحلیل بدفهمی‌های رخ داده، در جدول ۱۶ قابل ملاحظه است.

جدول ۱۵: نتایج سوال ۷

کد	تعداد	درصد	تشریح پاسخ
۵	۱	۰,۳	عدم توانایی تبدیل معادله توابع خطی به فرم استاندارد و تشخیص اجزای آن
۶	۲	۰,۷	نداشتن درک درست از a و b در معادله توابع خطی و جابه‌جا نوشتن آنها
۷	۲۷	۱۰,۵	عدم جایگذاری درست در فرمول معادله توابع خطی و ناقص نوشتن آن
۸	۲۸	۱۰,۹	اشکال محاسباتی
۹	۱۶	۶,۲	عدم درک رابطه نسبت‌های مثلثاتی با شیب
۱۴	۱۱۱	۴۳,۵	ننوشتن جواب یا جواب کاملاً بی ربط به سوال
۱۵	۱۲	۴,۷	عدم درک رابطه بین شیب دوخط موازی و عمود و...
پاسخ صحیح	۵۸	۲۲,۷	-----

جدول ۱۶: نتایج سوال ۷

تحلیل پاسخ‌ها با توجه به کد اختصاص یافته
۵. دانش‌آموز در تبدیل معادله توابع خطی داده شده به معادله استاندارد، ناتوان است؛ به همین جهت همواره ضریب x را در هر دو حالت به عنوان شیب در نظر می‌گیرد.
۶. در مواردی ملاحظه می‌شود که دانش‌آموز بعد از یافتن مقدار شیب، هنگام جای‌گذاری در معادله تفاوت a و b را درک نمی‌کند و شیب را به جای متغیر b قرار می‌دهد و عرض از مبدا را متغیر a در نظر می‌گیرد.
۷. دانش‌آموز با یافتن شیب، سوال را رها کرده و معادله خط را ننوشته است. همچنین در مواردی ملاحظه می‌شود که وی درکی از عرض از مبدا و برابر بودن آن با b در معادله خط استاندارد ندارد.
۸. این کد به پاسخ‌هایی تعلق یافته که دانش‌آموز در آن دچار اشکال محاسباتی شده است.
۹. دانش‌آموز رابطه بین $\tan$ و شیب را درک نکرده است. بدین علت سعی می‌کند با توجه به فرمول شیب به پاسخ برسد. هر چند از این طریق هم پاسخ درست خواهد بود، اما هدف در این سوال، پاسخ‌گویی با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی است.
۱۴. بدیهی است که در این حالت، سوال بی پاسخ توسط دانش‌آموز رها شده یا پاسخ کاملاً بی ربط به سوال مربوطه بوده است.
۱۵. این دسته از دانش‌آموزان غالباً جای x و y را در تعیین مختصات یک نقطه جابه‌جا نوشته‌اند. همچنین در مواردی علامت مثبت یا منفی x و y را درست تشخیص نداده‌اند.

تنها ۲۲.۷٪ از دانش‌آموزان این سوال رو بدون اشکال پاسخ داده‌اند. با توجه به جدول ۱۵، رایج‌ترین اشکال در پاسخ به این سوال، اشکال محاسباتی بوده است. اکثر دانش‌آموزان در مقدار $\tan$ اشکال داشتند بدین جهت خطای محاسباتی در این سوال درصد بالایی دارد. از بین خطاهای نظام‌مند در سوال فوق، کد ۷ یعنی عدم جایگذاری درست در فرمول معادله خط و ناقص نوشتن آن، بیشترین درصد را به خود اختصاص داده است و در دسته ترجمه نادرست قرار می‌گیرد.

سوال ۸



هدف از طرح این سوال پاسخ به این پرسش است که آیا دانش‌آموز می‌تواند از روی نمودار، زاویه درست را جهت تعیین شیب با استفاده از $\tan$ انتخاب کند؟
یافته‌های سوال هشتم:

در جدول ۱۷ درصد‌های مربوط به هر کد محاسبه شده است و در جدول ۱۸ بدفهمی‌های مربوط به هر کد تشریح شده است.

جدول ۱۷: نتایج سوال ۸

شماره کد	تعداد	درصد	تشریح پاسخ
۱	۱	۰.۳۵	اشکال در فرمول شیب
۵	۱	۰.۳۵	عدم توانایی تبدیل معادله توابع خطی به فرم استاندارد و تشخیص اجزای آن
۶	۳	۰.۷۱	نداشتن درک درست از a و b در معادله توابع خطی و جابه‌جا نوشتن آنها
۷	۵۴	۱۹.۳۵	عدم جایگذاری درست در فرمول معادله توابع خطی و ناقص نوشتن آن
۸	۲۳	۸.۲	اشکال محاسباتی
۹	۳۱	۱۱.۱۱	عدم درک رابطه نسبت‌های مثلثاتی با شیب
۱۰	۱	۰.۳۵	عدم تشخیص زاویه درست برای تعیین شیب
۱۴	۸۹	۳۱.۸۹	ننوشتن جواب یا جواب کاملاً بی ربط به سوال
۱۵	۳۱	۱۱.۱۱	عدم درک رابطه بین شیب دو خط موازی و عمود و...
پاسخ صحیح	۴۵	۱۶.۱۲	-----

جدول ۱۸: نتایج سوال ۸

تحلیل پاسخ‌ها با توجه به کد اختصاص یافته
۱: این دسته از دانش‌آموزان فرمول شیب را به‌خوبی درک نکرده‌اند و فهم آن‌ها از این فرمول صرفاً به‌صورت حفظ و به‌ذهن‌سپاری بوده و غالباً تفاضل x ها را بر تفاضل y ها تقسیم کرده بودند. همچنین نمونه‌هایی مانند $a = \frac{y_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ و $a = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ به چشم می‌خورد.
۵: دانش‌آموز در تبدیل معادله خط داده شده به معادله استاندارد ناتوان است؛ به همین جهت همواره ضریب x را در هر دو حالت به‌عنوان شیب در نظر می‌گیرد.
۶: در مواردی ملاحظه می‌شود که دانش‌آموز بعد از یافتن مقدار شیب، هنگام جای‌گذاری در معادله تفاوت a و b را درک نمی‌کند و شیب را به جای متغیر b قرار می‌دهد و عرض از مبدا را متغیر a در نظر می‌گیرد.

۷: دانش‌آموز با یافتن شیب، سوال را رها کرده و معادله خط را ننوشته است. همچنین در مواردی ملاحظه می‌شود که وی درکی از عرض از مبدا و برابر بودن آن با b در معادله خط استاندارد ندارد.
۸: این کد به پاسخ‌هایی تعلق یافته که دانش‌آموز در آن دچار اشکال محاسباتی شده است.
۹: دانش‌آموز رابطه بین $\tan$ و شیب را درک نکرده است. بدین علت سعی می‌کند با توجه به فرمول شیب به پاسخ برسد. هر چند از این طریق هم پاسخ درست خواهد بود اما هدف در این سوال، پاسخگویی با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی است.
۱۰: دانش‌آموزان در این حالت زاویه ۱۲۰ درجه را به عنوان زاویه مدنظر در نظر گرفته‌اند و شیب را با استفاده از این زاویه محاسبه کرده‌اند.
۱۴: بدیهی است که در این حالت، سوال بی پاسخ توسط دانش‌آموز رها شده یا پاسخ کاملاً بی ربط به سوال مربوطه بوده است.
۱۵: این دسته از دانش‌آموزان غالباً جای x و y را در تعیین مختصات یک نقطه جابه‌جا نوشته‌اند. همچنین در مواردی علامت مثبت یا منفی x و y را درست تشخیص نداده‌اند.

با توجه به نتایج حاصل تنها ۱۶.۱۲٪ از دانش‌آموزان پاسخ صحیح داده‌اند. تنوع بدفهمی‌های این سوال بیشتر است؛ زیرا غالباً دانش‌آموزان مفهوم عرض از مبدا را فرا نگرفته‌اند؛ بدین جهت مستقیم از معادله خط استاندارد استفاده نکرده‌اند. از بین خطاهای نظام‌مند در سوال فوق، کد ۷ یعنی عدم جایگذاری درست در فرمول معادله خط و ناقص نوشتن آن، بیشترین درصد را به خود اختصاص داده است و در دسته ترجمه نادرست قرار می‌گیرد.

سوال ۹



در واقع هدف از طرح این سوال بررسی توانایی دانش‌آموز در توصیف مفهوم شیب یک نمودار در قالب جمله است. اگر دانش‌آموزی شیب را عمیقاً درک کرده باشد، قادر خواهد بود آن را به راحتی توصیف کند. یافته‌های سوال نهم:

در جدول ۱۹ فراوانی و درصد هر کد مطرح شده است. در جدول ۲۰ تحلیل و تفسیر هر کد با توجه به سوال فوق، قابل ملاحظه است.

جدول ۱۹: نتایج سوال ۹

کد	تعداد	درصد	تشریح پاسخ
۱	۲	۰.۶۸	اشکال در فرمول شیب
۷	۵۸	۲۰	عدم جایگذاری درست در فرمول معادله توابع خطی و ناقص نوشتن آن
۸	۲	۰.۶۸	اشکال محاسباتی
۱۱	۶۸	۲۳.۴۴	عدم توانایی توصیف مفهوم شیب نمودار در جمله
۱۴	۱۴۲	۴۸.۹۶	ننوشتن جواب یا جواب کاملاً بی ربط به سوال
۱۵	۱۰	۳.۴	عدم درک رابطه بین شیب دو خط موازی و عمود و...
پاسخ صحیح	۸	۲.۷	-----

جدول ۲۰: نتایج سوال ۹

تحلیل پاسخ‌ها با توجه به کد اختصاص یافته
۱: این دسته از دانش‌آموزان فرمول شیب را به خوبی درک نکرده‌اند و فهم آن‌ها از این فرمول صرفاً به صورت حفظ و به ذهن سپاری بوده و غالباً تفاضل x ها را بر تفاضل y ها تقسیم کرده بودند. همچنین نمونه‌هایی مانند $a = \frac{y_1 - x_1}{y_2 - x_2}$ و $a = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ به چشم می‌خورد.
۷: دانش‌آموز با یافتن شیب، سوال را رها کرده و معادله خط را ننوشته است. همچنین در مواردی ملاحظه می‌شود که وی درکی از عرض از مبدا و برابر بودن آن با b در معادله خط استاندارد ندارد.
۸: این کد به پاسخ‌هایی تعلق یافته که دانش‌آموز در آن دچار اشکال محاسباتی شده است.
۱۱: بعضی از دانش‌آموزان به دلیل عدم درک کافی از مفهوم شیب در توصیف آن در قالب جمله با توجه به نمودار داده شده ناتوان هستند.
۱۴: بدیهی است که در این حالت، سوال بی پاسخ توسط دانش‌آموز رها شده یا پاسخ کاملاً بی ربط به سوال مربوطه بوده است.
۱۵: این دسته از دانش‌آموزان غالباً جای x و y را در تعیین مختصات یک نقطه جابه‌جا نوشته‌اند. همچنین در مواردی علامت مثبت یا منفی x و y را درست تشخیص نداده‌اند.

بیشترین درصد در میان بدفهمی‌های مربوطه مربوط به کد ۱۱ می‌باشد که حاکی از این است که اغلب دانش‌آموزان توانایی توصیف شیب در قالب جمله را ندارند. این نوع بدفهمی در دسته مفهوسازی محدود قرار می‌گیرد.

سوال ۱۰

دو خط $2x + 2y = 4$ و $2x - 2y = 2$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

هدف از این سوال اولاً بررسی توانایی دانش‌آموز در تبدیل معادله خطوط داده شده به معادله استاندارد است؛ ثانیاً پاسخ به این پرسش که آیا رابطه بین شیب دو خط عمود و موازی و ... را درک کرده است یا خیر؟ یافته‌های سوال دهم:

در جدول ۲۱ فراوانی و درصد هر کد و همچنین فراوانی و درصد پاسخ‌های صحیح ارائه شده است. همچنین در جدول ۲۲ تحلیل مربوط به هر کد قابل ملاحظه می‌باشد.

جدول ۲۱: نتایج سوال ۱۰

کد	تعداد	درصد	تشریح پاسخ
۵	۸	۳,۱	عدم توانایی تبدیل معادله توابع خطی به فرم استاندارد و تشخیص اجزای آن
۷	۱	۰,۳۹	عدم جایگذاری درست در فرمول معادله توابع خطی و ناقص نوشتن آن
۸	۱۲	۴,۶	اشکال محاسباتی
۱۲	۶۷	۲۶,۱۷	عدم درک رابطه بین شیب دو خط موازی و عمود و ...
۱۴	۱۵۱	۵۸,۹	ننوشتن جواب یا جواب کاملاً بی ربط به سوال
پاسخ صحیح	۱۷	۶,۶	-----

جدول ۲۲: نتایج سوال ۱۰

تحلیل پاسخ‌ها با توجه به کد اختصاص یافته
۵. دانش‌آموز در تبدیل معادله خط داده شده به معادله استاندارد ناتوان است؛ به همین جهت همواره ضریب x را در هر دو حالت به‌عنوان شیب در نظر می‌گیرد.
۷. دانش‌آموز با یافتن شیب، سوال را رها کرده و معادله خط را ننوشته است. همچنین در مواردی ملاحظه می‌شود که وی درکی از عرض از مبدا و برابر بودن آن با b در معادله خط استاندارد ندارد.
۸. این کد به پاسخ‌هایی تعلق یافته که دانش‌آموز در آن دچار اشکال محاسباتی شده است.
۱۲. در این نوع از بدفهمی، دانش‌آموز رابطه بین شیب دو خط عمود بر هم را درک نکرده است. در مواردی ملاحظه می‌شود که تفاوتی بین شیب دو خط قائل نیست و با شیب این دو خط را باهم یکسان در نظر می‌گیرد.
۱۴. بدیهی است که در این حالت، سوال بی پاسخ توسط دانش‌آموز رها شده یا پاسخ کاملاً بی ربط به سوال مربوطه بوده است.

در میان بدفهمی‌های مربوط به این سوال، بیشترین درصد مربوط به کد ۱۲ یعنی درک نادرست از رابطه بین شیب دو خط عمود و موازی و می‌باشد و این نوع بدفهمی در دسته ترجمه نادرست قرار می‌گیرد.

سوال ۱۱

معادله خط گذرنده از نقطه $(۳, ۱)$ و $(-۹, ۲۹)$ و $(-۶, ۲۲)$ را بنویسید.

هدف از طرح این سوال پاسخ به این پرسش است که آیا دانش‌آموز می‌تواند با استفاده از مختصات ۳ نقطه، معادله خط به دست آورد؟
یافته‌های سوال یازده:
در جدول ۲۳ درصد مربوط به هر کد قابل رویت می‌باشد. همچنین در جدول ۲۴ تحلیل این کدها قرار داده شده است.

جدول ۲۳: نتایج سوال ۱۱

کد	تعداد	درصد	تشریح پاسخ
۱	۳۴	۱۲,۶۸	اشکال در فرمول شیب
۷	۳۱	۱۱,۵۶	عدم جایگذاری درست در فرمول معادله توابع خطی و ناقص نوشتن آن
۸	۱	۰,۳۷	اشکال محاسباتی
۱۴	۱۹۱	۷۱,۲۶	ننوشتن جواب یا جواب کاملاً بی ربط به سوال
پاسخ صحیح	۱۱	۴,۱	-----

جدول ۲۴: نتایج سوال ۱۱

تحلیل پاسخ‌ها با توجه به کد اختصاص یافته
۱. این دسته از دانش‌آموزان فرمول شیب را به خوبی درک نکرده‌اند و فهم آن‌ها از این فرمول صرفاً به‌صورت حفظ و به‌ذهن‌سپاری بوده و غالباً تفاضل x ها را بر تفاضل y ها تقسیم کرده بودند. همچنین نمونه‌هایی مانند $a = \frac{y_1 - x_1}{y_2 - x_2}$ و $a = \frac{x_2 - x_1}{y_1 - y_2}$ به چشم می‌خورد.
۷. دانش‌آموز با یافتن شیب، سوال را رها کرده و معادله خط را ننوشته است. همچنین در مواردی ملاحظه می‌شود که وی درکی از عرض از مبدا و برابر بودن آن با b در معادله خط استاندارد ندارد.
۸. این کد به پاسخ‌هایی تعلق یافته که دانش‌آموز در آن دچار اشکال محاسباتی شده است.

۱۴: بدیهی است که در این حالت، سوال بی پاسخ توسط دانش آموز رها شده یا پاسخ کاملاً بی ربط به سوال مربوطه بوده است.

در سوال فوق بیشترین درصد در بین بدفهمی ها، مربوط به کد ۱ یعنی اشکال در فرمول شیب می باشد که در دسته بدفهمی از نوع مفهوم سازی محدود قرار می گیرد.

جدول ۲۵: نتایج کل سوالات در یک نگاه

شماره سوال	نوع خطای نظام مند
۱	مفهوم سازی محدود
۲	مفهوم سازی محدود
۳	مفهوم سازی محدود
۴	ترجمه نادرست
۵	ترجمه نادرست
۶	ترجمه نادرست
۷	ترجمه نادرست
۸	ترجمه نادرست
۹	مفهوم سازی محدود
۱۰	ترجمه نادرست
۱۱	مفهوم سازی محدود

بحث و نتیجه گیری

معلمان باید نسبت به مبانی ریاضی آگاهی کافی داشته باشند، تا بتوانند اشتباهات و بدفهمی های دانش آموزان را تفسیر و بررسی کرده و به بهبود آنها کمک نمایند. بدفهمی را می توان نتیجه تلاش دانش آموزان برای درک یک مفهوم دانست. بنابراین ممکن است هر فردی در هر سن و سطح آموزش دارای بدفهمی هایی باشد، که شایع و فراگیر است. تشخیص به موقع بدفهمی برای یاددهی و یادگیری بسیار مهم است؛ زیرا بخشی از ساختار مفهومی دانش آموزان را تشکیل می دهد؛ در نتیجه این اشتباهات روی یادگیری مطالب جدید تاثیر منفی خواهند گذاشت. در واقع آنها موانع جدی برای یادگیری خلاقانه مفاهیم تخصصی و مرتبط با آن موضوع هستند و امکان دارد یادگیری و درک مفاهیم جدید را مختل کنند. از سوی دیگر ممکن است بدفهمی ها بسیار قوی و ماندگار باشند و به سادگی اصلاح نشوند؛ بنابراین به جای تمرکز روی اصلاح بدفهمی های موجود، بهتر است معلمان از شکل گیری بدفهمی های جدید جلوگیری کنند. اولین قدم برای جلوگیری از ایجاد بدفهمی، تشخیص آنها است. در پژوهش حاضر به درک و فهم دانش آموزان از مفهوم شیب در ریاضیات و بدفهمی های موجود در این زمینه پرداخته شده است. بدفهمی های حاصل از بررسی پاسخ های دانش آموزان به سوالات طرح شده در پانزده کد طبقه بندی شده است. بررسی ها نشان داد که در ۱۱ سوال طرح شده در پژوهش، ۵۴٫۵ درصد از بدفهمی ها از نوع ترجمه نادرست و ۴۵٫۵ درصد از نوع مفهوم سازی محدود است. بنابراین اغلب خطاهای نظام مند دانش آموزان، ناشی از عدم توانایی تبدیل جداول، نمادها و نمودارها به یکدیگر می باشد؛ لذا آموزش و پرورش و برنامه ریزان ریاضی کشور باید در تنظیم محتوای کتب درسی و برنامه های آموزشی به گونه ای عمل کنند تا شرایط مناسب برای تدریس، ایجاد انگیزه، ایجاد ارتباط بین مفاهیم ریاضی و دنیای واقعی فراهم شود. یکی از راهکارهای رسیدن به این هدف، دانش آموز محور بودن کلاس است؛ اگر دانش آموز دست به اکتشاف بزند و روابط و رویه های حاکم رو خودش کشف کند و از حفظ طوطی وار جلوگیری شود، بسیاری از بدفهمی های حاضر رخ نخواهد داد.

با توجه به تحقیقات بسیار کمی که در کشورمان درباره شیب خط و دیدگاه و درک دانش آموزان از این مفهوم انجام شده است، لزوم پژوهش هایی دیگر در این زمینه کاملاً احساس می شود؛ مانند اثر آموزش مفهوم شیب در پاسخ به سوالات، بررسی مبحث شیب خط در کتب درسی؛ همچنین بررسی توانایی معلمان در تدریس این مبحث می توانند

در پژوهش‌های بعدی مورد مطالعه قرار گیرند.

مشارکت نویسندگان

میزان مشارکت نویسندگان در نگارش مقاله بطور مختصر شرح داده شود (به صورت درصد و نیز وظایف انجام شده در مقاله).

تشکر و قدردانی

از کادر تمام مدارس نواحی ۲ و ۳ و ۵ شهر تبریز که در انجام پژوهش حاضر همکاری‌های لازم را به عمل آوردند، سپاسگزاریم.

تعارض منافع

«هیچ‌گونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است»

References

- Allen, G. D., (2007). Misconceptions in mathematics, Department of Mathematics ,Texas A & M University,College Station.
- Bottle, G., (2010). Teaching mathematics in the primary school. Translator: Bakhshalizadeh, S., First Edition. Tehran: Samat Publications, original work publication, 2005.
- Baroody, A. Fiel, Y. & Johnson, A., (2007). An Alternative Reconceptualization of Procedural And Conceptual Knowledge. Journal of Education Resources Information Center (ERIC), 38, 115-131.
- Birgin, O., (2012). Investigation of Eighth-Grade Students' Understanding of the Slope of the Linear Function. Boletim de Educação Matemática, 26(42 A),139- 162.[fecha de Consulta 22 de Diciembre de 2023]. ISSN: 0103-636X.
- Cho, P. & Nagle, C., (2017). Procedural and conceptual difficulties with slope: An analysis of students mistakes on routine tasks. International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 3(1), 135- 150.xz.
- Donald, G. A., (2007), Student Thinking Lesson 1. Misconceptions in mathematics Texas A&M University Colleg Station, TX 77843-3368 Department of Mathematics, [In Persian].
- Graeber, A., & Johnson, M. (1991). Insights into Secondary School Students Understanding of Mathematics. College Park, University of Maryland.
- Hill, H., Ball, D. L., & Schilling, S., (2008). Unpacking “pedagogical content knowledge”: Conceptualizing and measuring teachers’ topic-specific knowledge of students. Journal for Research in Mathematics Education, 39 (4), 372-400.
- Haqkhah, Sara, and Davodi, Azar., (2019), (Methods for preventing and correcting mathematical misunderstandings) (a qualitative study). Research in Basic Science Education, (21)6, 24-37. [In Persian].
- Lloyd, G. W & Wilson, M., (1998), Supporting innovation: the impact of a teacher’s conceptions of functions on his implementation of a reform curriculum. Journal for Research in Mathematics Education, Reston, 29(3), 248 - 274.
- Molkhasi, A., (2019).The reasons for the concept of limit and its application . Research in basic science education, 6(19), 1-9.
- Nagle, C., & Moore-Russo, D., (2014). Slope Across the Curriculum: Principles and Standards for School Mathematics and the Common Core State Standards. The Mathematics Educator, 23(2), 40-59.
- Reihani, Ebrahim, Bakhshalizadeh, Shahrnaz, and Moini, Trifa. (2018) Examining the evolution of conceptual knowledge and knowledge A mathematical procedure and the relationship

- between them. *Educational Innovations*, (29)8, 51-27. [In Persian].
- Rittle-Johnson, B. & Schneider, M., (2012). Developing Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics. In R. Cohen Kadosh & Dowker. A, (2001), (Eds.), *Oxford handbook of numerical cognition*. Oxford University Press.
- Swan, M., Dealing with misconceptions in mathematics. in Gates, edpp. 65-147.
- Stump, S. L. (1996), Secondary mathematics teachers' knowledge of the concept of slope. 1996. Thesis (Doctoral in area of doctoral) - Illinois State University, Illinois.
- Walter, J. G., & Gerson, H., (2007). Teacher's personal agency: Making sense of slope through additive structures *Educational Studies in Mathematics*, 65(2), 203–233.
- Zuya, H. E., (2017). Prospective Teachers' Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: The Case of Algebra. *American Journal of Educational Research*, 5(3), 310-315.