Research in Mathematics Education, 2023, 3(1): 71-92

Research in Mathematics Education

ORIGINAL RESEARCH PAPER

Investigating 11th grade students' understanding of the concept of function by using problem posing

F. Kolahdouz[*1], *S. Hassanian Basari*[2]

[1]**Department of Mathematics Education, Farhangian University, PO Box 889-14665, Tehran, Iran*
[2]*Master of Science in Mathematics Education and Mathematics Teacher in Tehran*

Keywords:
. function
. problem posing
. 11th grade students
. multiple representations
. misconception

1 . Corresponding author
f.kolahdouz@cfu.ac.ir

ABSTRACT

Background and Objectives: Problem posing activities have relatively many educational capacities. The purpose of this study is to investigate the understanding of the 11th grade students of the concept of function by using problem posing. **Methods** The research method is descriptive-survey, and the statistical population includes all students of the 11th grade of District 1 of Tehran. From this population, 278 people were selected as sample by two-stage cluster random sampling method. In order to investigating the performance of students in problem-solving tasks, a researcher-made test was used. This test consisted of 3 tasks, whose formal and content validity was confirmed by a number of math professors and some math teachers with 11 years experience. The value of Cronbach's alpha coefficient was 0.79, which indicates the good reliability of the test. **Findings:** The results of the data showed that most of the problems proposed by the students were simple or similar to the textbook problems and the students showed low creativity in the problem posing. Their poor performance in responsing the test tasks clearly indicates that the constructions of the concept of function in the minds of most students are incomplete, and perhaps the most important factor can be considered their incorrect and procedural understanding of the concepts. **Conclusion:** Based on the obtained results, it can be said that the use of problem-solving tasks not only makes teachers aware of students' understanding of mathematical concepts and their misconceptions in various topics, but also the students themselves.

ISSN (Online): **DOI: 10.48310/RME.2024.16185.1083**

Received: 22/04/2024
Reviewed: 24/05/2024
Accepted: 04/06/2024
PP: 71-92

Citation (APA): Kolahdouz , F., Hassanian Basari, SH. (2023 Investigating 11th grade students' understanding of the concept of function by using problem posing, The *Journal of Research in mathematics education*, 3(1), 71-92.
https:// 10.48310/RME.2024.16185.1083

بررسی درک و فهم دانش‌آموزان پایه یازدهم از مفهوم تابع با استفاده از طرح مسئله

مقاله پژوهشی

فهیمه کلاهدوز*[1]، شهین حسنیان بصری[2]

**گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی۸۸۹ - ۱۴۶۶۵ ، تهران، ایران*

کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی مدارس شهر تهران

چکیده

پیشینه و اهداف: فعالیت‌های طرح مسئله از ظرفیت‌های آموزشی نسبتا متعددی برخوردار است. هدف مطالعهٔ حاضر، بررسی درک و فهم دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم از مفهوم تابع با استفاده از طرح مسئله است. **روش‌ها:** روش تحقیق در این پژوهش، توصیفی-پیمایشی بوده و جامعه آماری شامل کلیهٔ دانش‌آموزان پایه یازدهم منطقه یک شهر تهران است. از این جامعه، ۲۷۸ نفر به عنوان نمونه، به روش نمونه‌گیری تصادفی خوشه‌ای دو مرحله‌ای انتخاب شدند. به منظور بررسی عملکرد دانش‌آموزان در تکالیف طرح مسئله، از یک آزمون محقق ساخته استفاده گردید. این آزمون شامل ۳ سوال بود که روایی صوری و محتوایی آن توسط تعدادی از اساتید ریاضی و آموزش ریاضی و برخی از معلمان ریاضی با تجربهٔ پایه یازدهم مورد تأیید قرار گرفت. مقدار ضریب آلفای کرونباخ، ۰/۷۹ به دست آمد که بیانگر وضعیت مناسب پایایی آزمون است. **یافته‌ها:** نتایج حاصل از داده‌ها بیانگر آن بود که اکثر مسائل طرح شده توسط دانش‌آموزان، ساده و یا مطابق با مسائل کتاب درسی است و دانش‌آموزان، خلاقیت پایینی در طرح مسائل از خود نشان می‌دهند. عملکرد ضعیف آن‌ها در پاسخ به سؤالات آزمون، این نکته را به خوبی مشخص می‌کند که ساخت و سازهای مفهوم تابع در ذهن اکثر دانش‌آموزان، ناقص است که شاید مهمترین عامل آن را بتوان درک نادرست و رویه‌ای آن‌ها از مفاهیم دانست. **نتیجه‌گیری:** بر اساس نتایج به دست آمده، می‌توان گفت استفاده از تکالیف طرح مسئله باعث می‌شود که نه تنها معلمان نسبت به درک دانش‌آموزان از مفاهیم ریاضی و همچنین بدفهمی‌های آنان در مباحث مختلف آگاه شوند، بلکه خود دانش‌آموزان نیز به این آگاهی دست یابند.

از دستگاه خود برای اسکن و خواندن مقاله به صورت آنلاین استفاده کنید

DOI:10.48310/RME.2024.16185.1083

واژه‌های کلیدی:
- . تابع
- . طرح مسئله
- . دانش‌آموزان پایه یازدهم
- . بازنمایی‌های چند گانه
- . بدفهمی

۱. نویسنده مسئول
f.kolahdouz@cfu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۲/۰۳
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۰۳/۰۴
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۳/۱۵
شماره صفحات: ۷۱-۹۲

مقدمه

مفهوم تابع یکی از اساسی‌ترین مفاهیم در ریاضیات است که یادگیرندگان از دوره ابتدایی تا دانشگاه، با آن سر و کار دارند. یادگیری مفهوم تابع برای درک محتوای شاخه‌هایی از ریاضیات که شامل جبر و هندسه هستند، ضروری است (توماس[1] و همکاران، ۲۰۱۵؛ تراجیلو[2] و همکاران، ۲۰۲۳). برای بهتر فهمیدن این مفهوم توسط دانش‌آموزان در مقطع متوسطه، مثال‌ها با بازنمایی‌های مختلف در کتاب‌های درسی ریاضی ارائه می‌شوند که از آن جمله، می‌توان به بازنمایی‌های نمودار ون، ماشین تابع، جدول مقادیر، نمودار و بازنمایی جبری اشاره نمود؛ هر کدام از این بازنمایی‌ها، ویژگی‌های خاص خود را دارند و برای درک عمیق‌تر مفهوم تابع توسط دانش‌آموزان به کار می‌روند؛ در واقع توسعه مفهوم تابع، منجر به توسعه بازنمایی‌های مختلف از این مفهوم شده است. نتایج تحقیقات نشان می‌دهند که استفاده از بازنمایی‌های مختلف در فرآیند آموزش، درک و فهم دانش‌آموزان را از مفاهیم و ایده‌های ریاضی افزایش می‌دهد و یکی از روش‌های برقراری ارتباط بین تجربیات یادگیرنده و دانش رسمی ریاضیات، استفاده از بازنمایی‌های چندگانه است (تریپاتی[3] ۲۰۰۸). با این وجود، برخی از تحقیقات نشان می‌دهند که بسیاری از دانش‌آموزان، تنها یک درک ابتدایی و همچنین بدفهمی‌های[4] ریشه‌ای از مفهوم تابع دارند و بیشتر بر تعریف‌هایی که به آن‌ها آموخته شده است و مثال‌هایی که قبلاً تجربه کرده‌اند، تکیه می‌کنند (تراجیلو و همکاران، ۲۰۲۳). آشنایی سطحی دانش‌آموزان با چنین مفهوم پیچیده‌ای، اغلب، دشواری‌ها و پیچیدگی‌های ذهنی برای آن‌ها ایجاد می‌کند که منجر به بدفهمی‌ها و برداشت‌های نادرست در ذهن دانش‌آموزان می‌شود و بدین جهت، محققان بر این باورند که لازم است مفهوم تابع به طور آهسته و با توجه دقیق به ساختار شناختی دانش‌آموزان ارائه شود. بنابراین، طراحی یک آموزش خوب و عمیق می‌تواند به دانش‌آموزان کمک کند تا درک درستی از مفهوم تابع پیدا کنند (توفیقی، ۱۳۸۷؛ حسامی، ۱۳۹۵؛ تال و وینر[5] ۱۹۸۱؛ نولاسکو[6] ۲۰۱۸؛ تراجیلو و همکاران، ۲۰۲۳). یکی از فرآیندهایی که می‌توان به عنوان ابزار، جهت شناخت و ارزیابی میزان درک دانش‌آموزان از مفاهیم ریاضی و یافتن بدفهمی‌های متداول آن‌ها استفاده نمود، فرآیند طرح مسئله[7] است (پرهیزگار و همکاران، ۲۰۲۲). تعاریف زیادی برای طرح مسئله بیان شده است. به عنوان مثال، سیلور[8] (۱۹۹۴) طرح مسئله را تولید یک مسئله جدید و همچنین صورت‌بندی مجدد یک مسئلهٔ داده شده، می‌داند.

حل مسئله و طرح مسئله همواره به عنوان یکی از موضوعات مهم و چالش برانگیز در تحقیقات آموزش ریاضی مطرح بوده و در حال حاضر، تأکید زیادی در به کارگیری رویکرد طرح مسئله در فرایند آموزش ریاضی شده است. محققان بیان می‌دارند که طرح مسئله، تعامل بین معلم و دانش‌آموز را افزایش و تفکر واگرا را در دانش‌آموزان توسعه می‌دهد (کسان و کایا و گورسین[9] ۲۰۱۰؛ کای[10] و همکاران، ۲۰۱۶). فعالیت‌های طرح مسئله از ظرفیت‌های آموزشیِ نسبتاً متعددی برخوردار است. به عنوان مثال، یکی از مهم‌ترین این ظرفیت‌ها، نشان دادن آموخته‌های دانش‌آموزان است که می‌توان از فعالیت‌های طرح مسئله به عنوان ابزاری جهت آگاهی از میزان درک دانش‌آموزان از مفهوم تابع و یافتن بدفهمی‌های متداول دانش‌آموزان در این زمینه استفاده نمود (پرهیزگار و همکاران، ۲۰۲۲). لذا در مطالعه حاضر، نشان داده خواهد شد که برای یافتن میزان درک دانش‌آموزانِ پایهٔ یازدهم از مفهوم تابع و بدفهمی‌های آن‌ها از این مفهوم، می‌توان از تکالیف طرح مسئله با توجه به بازنمایی‌های چندگانه استفاده نمود. در این پژوهش به سه سؤال پاسخ داده می‌شود:

سؤال اول: عملکرد دانش‌آموزان پایه یازدهم در طرح مسئله از مفهوم تابع چگونه است؟

سؤال دوم: دانش‌آموزان پایه یازدهم در طرح مسائل خود بیشتر از چه بازنمایی‌هایی استفاده کرده‌اند؟

سؤال سوم : رایج‌ترین بدفهمی‌های دانش‌آموزان پایه یازدهم هنگام طرح مسئله از مفهوم تابع چیست؟

---

[1]. thomas
[2]. trujillo
[3]. tripathi
[4]. misconceptions
[5]. tall, & vinner
[6]. nolasco
7problem posing
[8]. silver
9keşan & kaya & güvercin
10cai

پیشینه پژوهش

تابع

مفهوم تابع یکی از مفاهیم محوری است که زیر بنای بسیاری از مفاهیم ریاضی است. بسیاری از توابع مورد مطالعه در حساب دیفرانسیل و انتگرال با عبارات جبری قابل بیان هستند (توماس و همکاران، ۲۰۱۵). به عنوان مثال، مساحت یک دایره با فرمول $A = \pi r^2$ بیان می‌گردد که نشان می‌دهد مساحت دایره به شعاع آن وابسته است. اهمیت درک مفهوم تابع، پایه و اساس درک مفاهیم اصلی در ریاضیات پیشرفته است (آویلا، ۲۰۱۳؛ توماس و همکاران، ۲۰۱۵؛ نولاسکو، ۲۰۱۸) اگر کسی بخواهد تابع و یا مباحثی را تدریس کند که وابسته به مفهوم تابع هستند، شناخت نقطهٔ شروع آن، از اهمیت خاصی برخوردار است (آویلا، ۲۰۱۳). این نقطهٔ شروع، تجزیه و تحلیل مراحلی خواهد بود که دانش‌آموز هنگام یادگیری در مورد توابع و حل مسائل مربوط به آن طی می‌کند. دانش‌آموزان ابتدا باید در مورد مفاهیم پایه یا مفاهیم فرعی دامنه، برد و ضابطه تابع بیاموزند؛ سپس، آن‌ها یاد می‌گیرند که توابع در اشکال مختلفی مانند نمودارهای نگاشت، جداول و نمایش‌های گرافیکی و جبری قابل نمایش و بازنمایی هستند. علاوه بر این، دانش‌آموزان یاد می‌گیرند که همان تابع به واسطه هر یک از این بازنمایی‌ها قابل بیان است و آن‌ها باید بتوانند از یک بازنمایی تابع به بازنمایی دیگر حرکت کنند.

تحقیقات نشان می‌دهند که بسیاری از دانش‌آموزان تنها یک درک ابتدایی و بدفهمی‌های[1] ریشه‌ای از مفهوم تابع دارند (تال و وینر، ۱۹۸۱؛ نولاسکو، ۲۰۱۸؛ پرهیزگار و همکاران، ۲۰۲۲؛ پترسون[2] ۲۰۱۲؛ پترسون و همکاران، ۲۰۱۳؛ ویدادا و همکاران، ۲۰۲۰؛ تراجیلو و همکاران، ۲۰۲۳). به گفته گویا (۱۳۸۲)، تابع از جمله مفاهیمی است که دانش‌آموزان مدرسه‌ای نسبت به آن، توانایی‌های متفاوتی نشان می‌دهند؛ از یک طرف برخورد رویه‌ای و طوطی‌وار نسبت به تابع، باعث شده است تا دانش‌آموزان با انواع نکته‌ها و ریزه‌کاری‌های محاسباتی آن آشنا شوند و از طرف دیگر، شواهد نشان می‌دهد که دانش‌آموزان در درک مفهوم تابع مشکل دارند، زیرا توانایی برقراری رابطه بین ساختار مفهومی و قواعد رویه‌ای تابع را ندارند. معلم می‌تواند با شناخت بدفهمی‌های دانش‌آموزان از مفاهیم ریاضی، به عنوان فرصت‌هایی برای بهبود آموزش ریاضی و توسعه‌ی یادگیری ریاضی دانش‌آموزان استفاده نماید (تراجیلو و همکاران، ۲۰۲۳). بنابراین برای کاهش بدفهمی‌های دانش‌آموزان، نقش کلیدی آموزشگران و معلمان را نباید نادیده گرفت و برای آن‌که معلمان بتوانند درک صحیح دانش‌آموزان را در زمینه تابع افزایش دهند، می‌بایست بدفهمی‌های مربوط به این مفهوم را شناسایی کنند و به رفع آنها بپردازند. البته باید به این نکته توجه داشت که بدفهمی‌ها دارای دو ویژگی اساسی هستند، اولین ویژگی مقاوم بودن آنها در مقابل تغییر است؛ به عبارت دیگر بدفهمی‌ها بسیار قوی و ماندگار هستند و ساختار محکمی دارند که به سادگی اصلاح نمی‌شوند و دومین ویژگی بدفهمی‌ها، آن است که بدفهمی‌ها مانع یادگیری می‌باشند (اوزکان[3] ۲۰۱۱). تال (۱۹۹۶، به نقل از گویا، ۱۳۸۲) معتقد است که یکی از دلایل عدم ایجاد رابطه بین درک مفهومی و درک سطحی تابع، می‌تواند شتاب‌زدگی در معرفی مجرد آن و نپرداختن به کاربردهای واقعی باشد. برای بیان و تدریس تابع روش‌های مختلفی وجود دارد، اما با توجه به بدفهمی‌های متعدد در این مفهوم باید از شیوه و روشی استفاده کرد که مفهوم تابع را به کامل‌ترین نحو به دانش‌آموزان آموزش داد.

---
[1]. Miscosception
[2]. Pettersson
[3]. Özkan

روش‌های جدیدی برای بازنمایی توابع، در طول توسعه این مفهوم به وجود آمده است که هرکدام از این بازنمایی‌ها در فهم جنبه‌های خاصی از مفهوم تابع، حائز اهمیت بوده و هریک به دیگری وابسته است. اما این بازنمایی‌ها ممکن است گاهی اوقات موجب سردرگمی دانش‌آموزان شود. برای جلوگیری از این وضعیت، رائو و متیوس[1](۲۰۱۷) معتقدند که دانش‌آموزان در صورتی می‌توانند درک بهتری از مفهوم تابع داشته باشند که بتوانند بین بازنمایی‌های مختلف آن ارتباط برقرار کنند.

بازنمایی‌های چند گانه

بازنمایی‌ها نقش بسیار مهمی در آموزش و یادگیری ریاضیات دارند. همچنین، در توسعه مفهوم تابع، نقش دوگانه‌ای دارند که عبارتند از: الف) راه‌های مختلفِ نشان دادنِ یک تابع؛ ب) راهی برای بیان راهبردهای استدلالی که دانش‌آموزان در توسعه مفهوم تابع به کار می‌برند (پرهیزگار، ۱۳۸۷). بازنمایی‌ها، توانایی حل مسئله را افزایش می‌دهند و دریچه‌هایی به روی تفکر دانش‌آموزان باز می‌کنند؛ بازنمایی‌های تابع می‌تواند زمینه‌ای مرتبط با اعداد (جدول و لیست)، هندسه (نمودارها) و نمادها (فرمول و معادله) باشند (پرهیزگار، ۱۳۸۷). برای بهتر فهمیدن مفهوم تابع توسط دانش‌آموزان می‌توان از بازنمایی‌های چندگانه استفاده نمود که از آن جمله می‌توان به نمایش تابع بوسیلهٔ نمودار، ماشین تابع، جدول مقادیر و ضابطه اشاره نمود. نتایج تحقیقات متعدد نشان می‌دهد استفاده از بازنمایی‌های چندگانه در فرآیند آموزش و همچنین درک و فهم دانش‌آموزان از مفاهیم و ایده‌های ریاضی مؤثر است (تریپاتی[2]، ۲۰۰۸). بازنمایی‌ها به دانش‌آموزان کمک می‌کنند تا ایده‌های ریاضی را سازماندهی، خلق و ثبت کنند؛ همچنین، آنها را درک کرده و انتقال دهند. علاوه بر این، بازنمایی‌ها در مدلسازی و تفسیر پدیده‌های فیزیکی، اجتماعی و ریاضی بسیار مفیدند.

توانایی شناسایی و ارائه یک چیز مشترک در بازنمایی‌های مختلف و انعطاف‌پذیری در انتقال از یک بازنمایی به بازنمایی دیگر، منجر به مشاهده روابط قوی بین مفاهیم، درک مفهومی بهتر، گسترده‌تر و عمیق‌تر فرد و تقویت توانایی فرد در حل مسائل می‌شود (نولاسکو، ۲۰۱۸). به دلیل اینکه هیچ بازنمایی واحدی نمی‌تواند همه جنبه‌های یک مفهوم ریاضی را نشان دهد، بهتر است از چندین بازنمایی برای نمایش ویژگی‌های یک مفهوم استفاده شود. پژوهش‌های بسیاری نشان داده‌اند که بازنمایی‌های چندگانه می‌توانند مزایای بسیار زیادی برای یادگیری دانش‌آموزان داشته باشند (رائو و متیوس، ۲۰۱۷؛ نولاسکو، ۲۰۱۸). برخی از پژوهش‌ها نیز نشان داده‌اند که اگر بازنمایی‌های چندگانه، درست استفاده نشوند، ممکن است یادگیری دانش‌آموزان را با شکست مواجه کنند (رائو و متیوس، ۲۰۱۷؛ سینجر[3]، ۲۰۰۷، ویدادا[4]و همکاران، ۲۰۲۰). در واقع اگر دانش‌آموزان نتوانند به صورت مناسبی هر بازنمایی را تفسیر کنند و یا نتوانند ارتباطاتی را بین بازنمایی‌های چندگانه ایجاد نمایند؛ در این حالت ممکن است استفاده از بازنمایی‌های چندگانه، بیشتر دانش‌آموزان را سردرگم کند تا این که به یادگیری آن‌ها کمک نماید (رائو و متیوس، ۲۰۱۷، ویدادا همکاران، ۲۰۲۰).

در بسیاری از موارد، معلمان برای قابل فهم ساختن مفاهیم پیچیدهٔ ریاضی و هدایت صحیح تفکر ریاضی دانش‌آموزان از بازنمایی‌های بصری استفاده می‌کنند (رائو و متیوس، ۲۰۱۷). برای مثال، بازنمایی بصری در بصری‌سازی داده‌ها در آمار، نمودارهای توابع در جبر و کشیدن اشکال هندسی استفاده می‌شوند. افزودن بازنمایی‌های بصری (مانند نمودارها) به بازنمایی‌های مبتنی بر متن (مسائل کلامی[5]) و بازنمایی‌های نمادین (مانند معادلات)

[1]. Rau & *Matthews*
[2]. Tripathi
[3]. Singer
[4]. Widada
[5]. Word problems

می‌تواند یادگیری دانش‌آموزان را ارتقا بخشد (رائو و متیوس، ۲۰۱۷) در واقع بازنمایی‌های بصری برای ارتقاء سطح یادگیری مؤثر هستند (رائو و همکاران، ۲۰۱۵). همچنین در ارزیابی و بررسی درک دانش‌آموزان، مشاهده بازنمایی‌ها و نمایش‌های تولید شده توسط آن‌ها، این امکان را برای معلمان فراهم می‌آورد که اطلاعات مفیدی راجع به روش‌های تفکر و تفسیر دانش‌آموزان از مفاهیم کسب کنند (احمدی، ۱۳۹۶).

طرح مسئله

حل مسئله و طرح مسئله[1]همواره به عنوان یکی از موضوعات مهم و چالش برانگیز در تحقیقات آموزش ریاضی مطرح بوده است. در حال حاضر، تاکید زیادی در به کارگیری رویکرد طرح مسئله در فرایند آموزش ریاضی است. به طور کلی، طرح مسئله به تولید مسائل جدید و اصلاح مسائل مفروض اشاره دارد (ال ساید[2] ۲۰۰۲). محققان بیان می‌دارند که طرح مسئله، تعامل بین معلم و دانش‌آموز را افزایش و تفکر واگرا را توسعه می‌دهد (کسان و کایا و گورسین[3] ۲۰۱۰؛ کای[4]و همکاران، ۲۰۱۶). شورای ملی معلمان ریاضی (۲۰۰۰) نیز بر حل مسئله و طرح مسئله در ریاضیات مدرسه‌ای تأکید می‌کند. تعاریف زیادی برای طرح مسئله بیان شده است. برای مثال، استویانوا و الرتون[5](۱۹۹۶) طرح مسئله را فرایندی می‌دانند که در آن، دانش‌آموزان بر اساس تجارب ریاضی خود، مسائل ریاضی را صورت‌بندی می‌کنند. سیلور[6] (۱۹۹۴) نیز طرح مسئله را تولید یک مسئله جدید و همچنین صورت‌بندی مجدد یک مسئله داده شده، می‌داند. توسعهٔ مهارت‌های طرح مسئله برای دانش‌آموزان یکی از اهداف مهم یادگیری ریاضیات است و باید بخشی از فعالیت‌های ریاضی را به خود اختصاص دهد (کرسپو[7] ۲۰۰۳). به‌علاوه، فعالیت‌های طرح مسئله، بینش مهمی را نسبت به فهم یادگیرندگان از مفاهیم و فرآیندهای ریاضی برای معلمان فراهم می‌کند (براون و والتر[8] ۱۹۹۳). به منظور بهبود یادگیری دانش‌آموزان از مفاهیم ریاضی، آگاهی از پیشرفت و رشد آن‌ها در تفکر و استدلال مهم است. در واقع طرح مسئله توسط دانش‌آموزان در ارتباط با مفاهیم ریاضی، یکی از روش‌هایی است که موجب می‌گردد معلم بیشتر بتواند اطلاعاتی درباره این‌که دانش‌آموزان چه می‌دانند و چگونه فکر می‌کنند، به دست آورد و بر اساس آن، روش آموزش خود را طراحی کند (کای، ۲۰۰۳). در ارتباط با فرایند طرح مسئله، چارچوب‌های متعددی وجود دارد (به عنوان مثال، براون و والتر،۱۹۹۳؛ استویانوا و الرتون،۱۹۹۶؛ استویانوا، ۱۹۹۷؛ کریستو[9]و همکاران، ۲۰۰۵). استویانوا و الرتون(۱۹۹۶) تکلیف طرح مسئله را به سه دسته طبقه‌بندی می‌کند، موقعیت‌های آزاد؛[10]نیمه‌ساختار یافته[11]و ساختاریافته.[12]با توجه به این چارچوب، موقعیت یک مسئله را آزاد گویند زمانی که از دانش‌آموزان خواسته شود از یک موقعیت یا وضعیت خاص، مسئله طرح کنند. در موقعیت نیمه‌ساختار یافته از دانش‌آموزان خواسته می‌شود که از یک موقعیت باز، ساختار را کشف نموده و آن را با به کاربردن اطلاعات، دانش، مهارت، مفاهیم و ارتباط با تجربه‌های ریاضی قبلی خود تکمیل کنند. یک موقعیت، ساختاریافته است، زمانی که فعالیت طرح مسئله بر پایهٔ یک مسئلهٔ خاص باشد. کریستو و همکاران (۲۰۰۵) مدل نظری طرح مسئله‌ای را ارائه داد که عبارتند از: انتخاب اطلاعات کمّی، ترجمه اطلاعات کمّی، درک و سازماندهی اطلاعات کمّی با ایجاد ارتباط بین اطلاعات ارائه شده و ویرایش اطلاعات کمّی. در

1problem Posing
2. el sayed
3keşan & kaya & güvercin
4cai
5stoyanova & ellerton
6silver
7. crespo
8. brown & walter
9. christou
10. free situatio-
11. semi- structured situation
12. structured situation

این مدل، سه گروه مختلف از دانش‌آموزان را می‌توان شناسایی نمود. گروه اول، دانش‌آموزانی که قادر به پاسخگویی به تکالیف درک می‌باشند؛ گروه دوم، دانش‌آموزانی که قادر به پاسخگویی به دو تکلیف درک و ترجمه هستند و گروه سوم، دانش‌آموزانی که قادر به پاسخگویی به انواع تکالیف می‌باشند (کریستو و همکاران، ۲۰۰۵).

در پژوهش حاضر، نشان خواهیم داد که برای یافتن میزان درک دانش‌آموزان پایه یازدهم از مفهوم تابع و بدفهمی‌های آن‌ها از این مفهوم، می‌توان از تکالیف طرح مسئله با توجه به بازنمایی‌های چندگانه استفاده نمود.

روش

جامعهٔ آماری این پژوهش، دانش‌آموزان دختر و پسرِ پایه یازدهم منطقه یک شهر تهران است. تعداد ۲۷۸ نفر از آن‌ها، به روش نمونه‌گیری تصادفی خوشه‌ای دو مرحله‌ای انتخاب گردید. ابتدا چند مدرسه بطور تصادفی از طرف اداره آموزش و پرورش انتخاب و سپس در هر مدرسه نیز یک کلاس بطور تصادفی به عنوان نمونه در نظرگرفته شد. در این پژوهش برای گردآوری داده‌ها، از آزمون محقق ساخته استفاده شد. هدف اصلی آزمون، بررسی درک و فهم دانش‌آموزان از مفهوم تابع با استفاده از طرح مسئله است. در مرحلهٔ اول از طراحی آزمون، ۱۲ سوال با توجه به چارچوب استویانوا و الرتون (۱۹۹۶) و کریستو و همکاران (۲۰۰۵) و با توجه به بازنمایی‌های متفاوت از مفهوم تابع طراحی گردید که پس از بازبینی و اصلاح و مشورت با اساتید ریاضی و آموزش ریاضی و همچنین معلمان با تجربه، مورد تأیید واقع گردید.

آزمون در بین ۳۰ نفر از دانش‌آموزان پایه یازدهم در یکی از مدارس دخترانه منطقه یک آموزش و پرورش شهر تهران اجرا گردید. نتیجه آزمون مقدماتی، مورد بررسی قرار گرفت. در این مرحله، تعدادی از سؤالات، مناسب تشخیص داده نشد و حذف شدند. بار دیگر آزمونی با ۶ سؤال تهیه و تنظیم گردید. این آزمون بار دیگر در بین ۲۵ نفر از دانش‌آموزان پایه یازدهم در یکی از مدارس دخترانه منطقه یک آموزش و پرورش شهر تهران انجام گردید و مانند مرحله قبل، نتیجه آزمون بررسی شد. در این مرحله ۳ سؤال مورد تأیید تعدادی از اساتید ریاضی و آموزش ریاضی قرار گرفت. سپس آزمون در بین نمونه آماری تحقیق، اجرا گردید. بدینگونه روایی محتوایی آزمون به طور کیفی تأیید شد. برای بررسی پایایی آزمون پس از اجرای آن در نمونه‌ی اولیه شامل ۲۵ نفر از دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم متوسطه در مرحلهٔ سوم ارزیابی سؤالات آزمون، از روش برآورد ضریب آلفای کرونباخ استفاده گردید. برای این منظور با استفاده از نرم افزار آماری spss ضریب آلفای کرونباخ پرسش‌نامه، ۰/۷۹ به‌دست آمد که این مقدار، وضعیت مناسبی را در مورد پایایی آزمون نشان می‌دهد.

بررسی محتوای سؤالات آزمون طرح مسئله

با استناد به این که یکی از فواید تکالیف طرح مسئله، تشخیص بدفهمی‌های دانش‌آموزان از مفاهیم ریاضی است، لذا سؤالات آزمون به گونه‌ای طراحی شد که پس از اجرای آزمون، بدفهمی‌های دانش‌آموزان در مفهوم تابع نیز مشخص گردد. لذا سؤالات بر اساس مدل نظری کریستو و همکاران (۲۰۰۵) طراحی گردید؛ زیرا توانایی دانش‌آموزان در پاسخگویی به فعالیت‌های طرح مسئله در ارتباط با تابع از منظر این مدل به خوبی قابل بررسی بود. این آزمون شامل ۳ سؤال بر اساس دو موقعیت درک و ترجمه از چارچوب کریستو و همکاران (۲۰۰۵) تنظیم شد. در عین حال به این نکته نیز توجه گردید که سؤالات آزمون، مطابق با موقعیت نیمه ساختاریافته از چارچوب استویانوا و الرتون (۱۹۹۶) نیز باشد. همچنین بازنمایی‌های مختلف تابع در طرح سؤالات آزمون در نظر گرفته شد. بازنمایی های به کار رفته در طرح سؤالات آزمون شامل بازنمایی گرافیکی (نمودار)، بازنمایی جدول و بازنمایی فرمولی بود.

سؤالات آزمون

سؤال اول

۱- ضابطهٔ توابع f و g و h به صورت زیر است:

$f(x)=\frac{2}{3}$ $g(x)=\frac{3}{2}x$ $h(x)=10^{x}$

هر تعداد مسئله در ارتباط با معکوس تابع (شامل: ضابطهٔ تابع وارون، دامنه و برد آن، رسم وارون تابع و ....) با در نظر گرفتن توابع f و g و h داده شده، بنویسید و مسائل طرح شده خود را حل نمایید.

همانگونه که مشاهده می‌کنیم در سؤال اول. تابع f یک تابع ثابت است که یک به یک نمی‌باشد، در نتیجه معکوس پذیر نیست. تابع g، تابعی خطی است و دانش‌آموزان معمولاً برای یافتن معکوس این تابع از یک رویه مشخص می‌توانند استفاده نمایند. تابع تابعی نمایی است که دانش‌آموزان در ابتدا، نمایی بودن آن را باید تشخیص دهند و سپس با توجه به معکوس این گونه توابع که تابع لگاریتمی می‌باشد به یافتن تابع معکوس مبادرت کنند. هدف از این سؤال بررسی درک دانش‌آموزان از مفهوم تابع در بازنمایی نمادین است. این سؤال بر اساس چارچوب کریستو و همکاران (۲۰۰۵) در موقعیت درک قرار گرفته و بر اساس چارچوب استویانوا و الرتون (۱۹۹۶) مطابق با موقعیت نیمه ساختاریافته است. در طرح سؤالات آزمون از بازنمایی‌های متفاوت تابع نیز استفاده گردید. پنج شیوه متمایز از بازنمایی‌ها که در یادگیری مفاهیم و حل مسئله رخ می‌دهند وجود دارد که یکی از این شیوه‌ها، نمادهای نوشتاری است و از طریق آن‌ها جملات و عبارات، معنای خاصی می‌گیرند (اولیوم[1]، ۲۰۰۴). به همین منظور در طراحی سؤال اول از بازنمایی نوشتاری (نمادی، فرمولی) استفاده گردید.

سؤال دوم

۲-دو جدول زیر مربوط به توابع f و g می‌باشند. با توجه به این جدول‌ها هر تعداد مسئله که می‌توانید در ارتباط با تابع (شامل: تساوی‌توابع، جمع، تفریق، ضرب، تقسیم‌توابع و رسم آن‌ها) طرح کنید و مسائل طرح شده خود را **حل** نمایید.

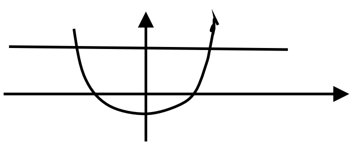
$g(x)$	x
۵	-۲
۱	-۱
۵	۰
۲	۳
-۱	۴

$f(x)$	x
۵	-۲
۶	-۱
۳	۰
-۱	۱
۳	۲
-۲	۳

سؤال دوم آزمون بر اساس چارچوب کریستو و همکاران (۲۰۰۵)، در موقعیت ترجمه است و مطابق با موقعیت نیمه ساختار یافتهٔ استویانوا و الرتون (۱۹۹۶) در مبحث تابع طرح شده است. همچنین باتوجه به بازنمایی‌های مختلف تابع، سؤال بر اساس بازنمایی تصویری (جدول) است. این سؤال، توانایی برقراری ارتباط بین این نوع بازنمایی با بازنمایی‌های دیگر تابع از جمله نموداری، فرمولی و یا زوج مرتبی را مورد سنجش قرار می‌دهد.

سؤال سوم

۳- با توجه به نمودار داده شده هر تعداد مسئله که می‌توانید درارتباط با تابع (شامل :دامنه، برد، ضابطه، معکوس‌پذیری، جمع، تفریق، ضرب، تقسیم توابع و..) طرح کنید و مسائل طرحْ شدهٔ خود را حل نمایید.

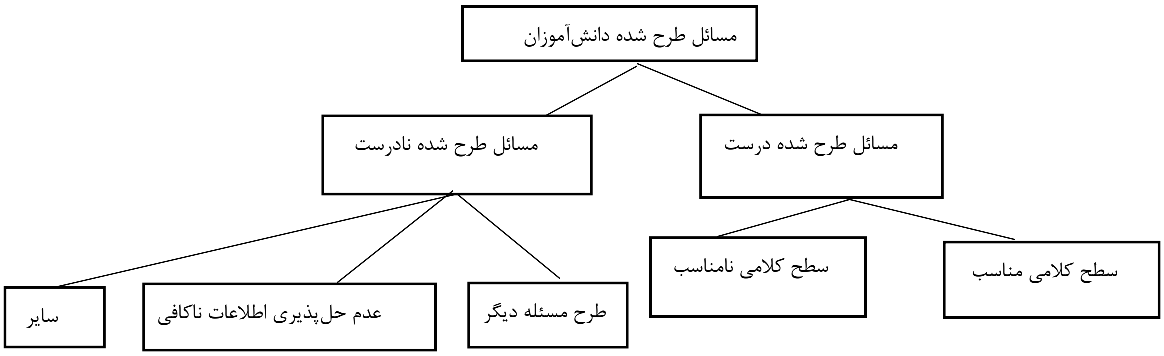


[1]. oylum

سؤال سوم آزمون نیز بر اساس تقسیم بندی کریستو و همکاران (۲۰۰۵) در دستهٔ ترجمه قرار می‌گیرد و مطابق با موقعیت نیمه‌ساختاریافته استویانوا و الرتون (۱۹۹۶) طراحی شده است که بازنمایی آن، از نوع تصویری (نمودار تابع) می‌باشد. هدف از طرح این سؤال نیز سنجش میزان درک دانش‌آموزان از بازنمایی نموداری توابع و توانایی تبدیل این نوع بازنمایی به بازنمایی‌های دیگر است.

روند بررسی و تحلیل داده‌ها

برای بررسی مسائل طرح شده توسط دانش‌آموزان از چارچوب برگرفته از مدل سیلور و کای (۱۹۹۶) استفاده گردید (شکل ۱). این چارچوب، توانایی طرح مسئلهٔ دانش‌آموزان را از لحاظ سطح کلامی مورد ارزیابی قرار می‌دهد. مسائل طرح شده در این چارچوب ابتدا به دو دستهٔ درست و نادرست تقسیم بندی گردید که هر کدام نیز زیرشاخه‌هایی دارند. مسائل درست به دو زیر شاخهٔ مسائل با سطح کلامی مناسب و سطح کلامی نامناسب تقسیم گردید و مسائل نادرست نیز به ۳ دستهٔ طرح مسئله دیگر، عدم حل‌پذیری (اطلاعات ناکافی) و سایر تقسیم‌بندی شد.



شکل ۱: چارچوب ارزیابی پاسخهای دانش آموزان به سوالات

همچنین در بررسی پاسخ‌ها به سؤالات آزمون، مؤلفه سیالی در مسائل طرح شده توسط دانش‌آموزان، نیز محاسبه شد.. بدین صورت که ابتدا تعداد دانش‌آموزانی که در هر یک از سؤالات آزمون، مسئله طرح نکرده بودند از تعداد کل دانش‌آموزان حذف شدند. سپس برای مؤلفه سیالی، با توجه به پژوهش کنترویچ و همکاران (۲۰۱۱) برای یافتن میانگین سهم هر فرد در طراحی مسائل درست، فقط پاسخ‌های درست طرح شده در نظر گرفته می‌شود.

یافته‌ها

برای پاسخ به سؤالات پژوهش، فراوانی مسائل طرح شده توسط دانش‌آموزان و نوع پاسخ آن‌ها به سؤالات آزمون مورد بررسی قرار می‌گیرد.

سوال اول پژوهش: عملکرد دانش‌آموزان پایه یازدهم در طرح مسئله از مفهوم تابع چگونه است؟

پاسخ به سه سؤال آزمون، درک دانش‌آموزان در زمینه تابع را مورد ارزیابی قرار می‌دهد. در ابتدا برای بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان از چارچوب مطرح شده در شکل۱، استفاده گردید. جدول۱، فراوانی مسائل طرح شده توسط دانش‌آموزان را بر اساس درستی و نادرستی مسائل و نیز سطح کلامی آن‌ها نشان می‌دهد.

جدول۱: فراوانی مسائل طرح شده بر اساس درست و نادرست بودن

سؤال	تعداد شرکت کنندگان	بدون پاسخ	کل مسائل طرح شده درست: سطح کلامی مناسب		سطح کلامی نامناسب		مسائل طرح شده نادرست		میانگین سهم هر فرد در طراحی مسائل درست
			فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	
اول	۲۷۸	۱۴	۶۲۷	۷۵	۳۲	۳	۱۷۶	۲۱	۲/۴۹
دوم	۲۷۸	۴۲	۴۳۳	۷۹	۵۵	۱۰	۵۶	۱۰/۳	۲/۰۶
سوم	۲۷۸	۵۶	۵۲۲	۸۷	۲۱	۳	۵۶	۹/۳	۲/۴۴
کل آزمون	۲۷۸	۱۱۲	۱۵۸۲	۷۹	۱۰۸	۵	۲۸۸	۱۴	۷/۰۲

بر اساس نتایج به دست آمده از جدول ۱ مشاهده می‌شود که دانش‌آموزان، در کل ۱۵۸۲مسئله درست با سطح کلامی مناسب و۱۰۸ مسئله با سطح کلامی نامناسب طرح کردند، یعنی ۱۶۹۰ مسئله درست طرح نمودند که ۷۹ درصد از این مسائل از سطح کلامی مناسبی برخودار بود و حدود ۵ درصد، مسائلی با سطح کلامی نامناسب طرح کردند و ۱۴ درصد از کل مسائل طرح شده نادرست بود. پس از بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان مشخص گردید اکثر مسائلی که دانش‌آموزان طرح کرده بودند مشابه یکدیگر بوده و مسائل، تنوع کمی داشتند. همچنین با توجه به داده‌ها درمی‌یابیم که بیشترین مسائل طرح شدهٔ درست، مربوط به سؤال اول آزمون است._همانطور که مشاهده می‌گردد که اگر چه مسائل طرح شده دانش‌آموزان در سؤال اول بیشتر از سؤال دوم و سوم آزمون است، ولی عملکرد دانش‌آموزان در پاسخ به سؤال اول آزمون در مقایسه با سؤالات دیگر، پایین‌تر بوده است.

سؤال دوم پژوهش: دانش‌آموزان پایه یازدهم در طرح مسائل، بیشتر از چه بازنمایی‌هایی استفاده می‌کنند؟

در سؤال اول آزمون، هدف، بررسی درک دانش‌آموزان از تابع ثابت، خطی و نمایی و همچنین سنجش میزان علاقه‌مندی دانش‌آموزان نسبت به بازنمایی نمادی تابع بوده است. سؤال دوم آزمون نیز با توجه به چارچوب کریستو(۲۰۰۵) در موقعیت ترجمه و از لحاظ بازنمایی نیز جزء بازنمایی جدولی توابع قرار می‌گیرد. سؤال سوم آزمون نیز از نظر بازنمایی جزء بازنمایی نموداری است. فراوانی و درصد پاسخ‌های درست و نادرست دانش‌آموزان به سه سوال آزمون در جدول ۲ ارائه شده است.

جدول ۲: فراوانی پاسخ‌های درست و نادرست دانش‌آموزان

سؤال	نوع پاسخ	فراوانی	درصد فراوانی نسبت به سوال	درصد فراوانی نسبت به کل آزمون
سوال اول (تمرکز	درست	۶۵۹	۷۹	۳۳/۲

روی بازنمایی نمادی)	نادرست	۱۷۶	۲۱	۸/۹
	جمع کل	۸۳۵	۱۰۰	۴۲
سوال دوم(تمرکز روی بازنمایی جدولی)	درست	۴۸۸	۸۹/۷	۲۴/۶
	نادرست	۵۶	۱۰/۳	۲/۸
	جمع کل	۵۴۴	۱۰۰	۲۷/۴
سوال سوم(تمرکز روی بازنمایی نموداری)	درست	۵۴۳	۹۰/۶	۲۷/۳
	نادرست	۵۶	۹/۳	۲/۸
	جمع کل	۵۹۹	۱۰۰	۳۰/۱

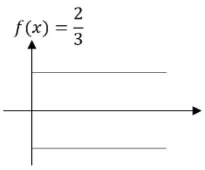
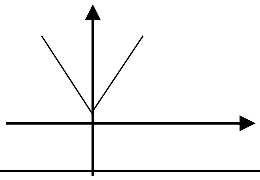
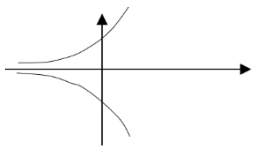
از داده‌های جدول۲ چنین نتیجه گرفته می‌شود که توانایی طرح مسئله دانش‌آموزان در ارتباط با سؤال اول آزمون از سؤال دوم و سوم آزمون بیشتر است. بطور کلی دانش‌آموزان، ۱۹۸۷ مسئله برای این سه سؤال طرح کرده‌اند که ۸۳۵ تا مربوط به سؤال اول، ۵۴۴ تا مربوط به سؤال دوم و ۵۹۹ تا نیز مربوط به سؤال سوم آزمون است. در واقع،۴۲ درصد از سؤالات طراحی شده در ارتباط با سؤال اول، ۲۷/۴ درصد سوالات طراحی شده، در ارتباط با سؤال دوم و۳۰/۱ آن مرتبط با سؤال سوم است.

سؤال سوم پژوهش: رایج‌ترین بدفهمی‌های دانش‌آموزان پایه یازدهم از مفهوم تابع چیست؟

با توجه به پاسخ دانش‌آموزان به مسائل مطرح شده توسط خود آن‌ها، این نتیجه حاصل می‌شود که دانش‌آموزان با بدفهمی‌های متفاوتی روبرو هستند؛ چند نمونه از این بدفهمی‌ها در ادامه، در جدول‌های ۳، ۴ و ۵ ارائه می‌شوند. جدول ۳ بدفهمی‌های متداول دانش‌آموزان از مفهوم تابع را در پاسخ به سؤال ۱ نشان می‌دهد.

جدول۳: بدفهمی‌های متداول دانش‌آموزان از مفهوم تابع در پاسخ به سؤال ۱ آزمون

<table>
<tr><td colspan="2">۱- ضابطه توابع f، g و m به‌صورت زیر داده شده است:
$f(x) = \frac{2}{3}$ $g(x)=\frac{3}{2}x$ $h(x) = 10^x$
هر تعداد مسئله در ارتباط با معکوس تابع (شامل: ضابطه تابع وارون، دامنه و برد آن، رسم وارون تابع و....) را با در نظر گرفتن توابع f،g و h داده شده بنویسید و مسائل طرح شده خود را حل نمایید.</td></tr>
<tr><td>نمونه‌ای از بدفهمی‌های دانش‌آموزان در پاسخ به سؤال اول آزمون</td><td>نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانش‌آموزان</td></tr>
<tr><td>۱) برخی دانش‌آموزان فکر می‌کنند با تغییر اسم متغیر مستقل، تابع دیگری ساخته می‌شود.</td><td>تابع وارون $g(x) = \frac{3}{2}x$ را به دست آورید.
$g(x) = \frac{3}{2}x \quad g(y) = \frac{3}{2}y$</td></tr>
</table>

۲) برخی دانش‌آموزان به جای یافتن ضابطه وارون تابع، قرینه آن را می‌یابند.	تابع وارون $f(x)=\frac{2}{3}$ را در دامنه ($+\infty$ و ۰) رسم کنید. $f^{-1}(x)=\frac{-2}{3}$ 
۳) برخی دانش‌آموزان برای یافتن نمودار وارون، قرینهٔ آن را نسبت به محور y ها می‌یابند.	وارون تابع $g(x)=\frac{3}{2}x$ را رسم کنید. 
۴) برخی دانش‌آموزان برای یافتن نمودار وارون، قرینه آن را نسبت به محور x ها می‌یابند.	تابع $h(x)$ را رسم و سپس معکوس آن را رسم کنید. 
۵) برخی دانش‌آموزان بین $f^{-1}(x)$ و $\frac{1}{f(x)}$ تمایز قائل نمی‌شوند.	وارون تابع $h(x)=10^x$ را به دست آورید. $=\frac{1}{10^x}h^{-1}(x)$
۶) برخی دانش‌آموزان فکر می‌کنند در توابع نمایی برای یافتن وارون تابع، باید جای پایه و توان عوض گردد.	وارون تابع $h(x)=10^x$ را به دست آورید. $h^{-1}(x)=x^{10}$
۷) برخی دانش‌آموزان، متوجه نمی‌شوند که تابع ثابت، وارون ندارد..	تابع وارون تابع $f(x)=\frac{2}{3}$ را به دست آورید . $f^{-1}(x)=\frac{-2}{3}$ $f(x)=\frac{2}{3}$
۸) برخی دانش‌آموزان در بدست آوردن دامنه تابع ثابت مشکل دارند.	دامنه تابع $f(x)=\frac{2}{3}$ را بنویسید. $D_f=\{\frac{2}{3}\}$
۹) برخی دانش‌آموزان درک درستی از شرایط تساوی دو تابع ندارد.	آیا سه تابع f, gوh با یکدیگر برابرند بله هر سه برابرند $D_g=R$ $D_f=R$ $D_h=R$
۱۰) برخی دانش‌آموزان فکر می‌کنند برای یافتن وارون تابع نمایی می‌بایست ریشه‌گیری کند.	وارون تابع $h(x)=10^x$ را به دست آورید. $h^{-1}(x)=\sqrt[x]{10^x}$ $H(x)=10^x$

با توجه به جدول ۳، در پاسخ به سؤال اول آزمون، بیشترین درصد تکرار بدفهمی‌ها مربوط به یافتن معکوس تابع ثابت $f(x)$ و بعد از آن، در ارتباط با تابع نمایی $h(x)$ می‌باشد. جدول ۴، بدفهمی‌های متداول دانش‌آموزان از مفهوم تابع را در پاسخ به سؤال ۲ نشان می‌دهد.

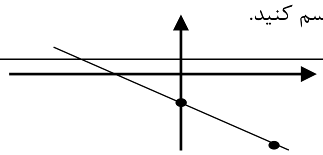
جدول۴: بدفهمی‌های متداول دانش‌آموزان از مفهوم تابع در پاسخ به سؤال ۲ آزمون

۲-دو جدول مقابل مربوط به توابع f و g می‌باشند. با توجه به این جدول‌ها هر تعداد مسئله که می‌توانید در ارتباط با تابع (شامل: تساوی‌توابع، جمع، تفریق، ضرب، تقسیم توابع و رسم آن ها) طرح کنید و ضمناً مسائل طرح شده خود را حل نمایید.

x	$f(x)$
-۲	۵
-۱	۶
۰	۳
۱	-۱
۲	۳
۳	-۲

x	$g(x)$
-۲	۵
-۱	۱
۰	۵
۳	۲
۴	-۱

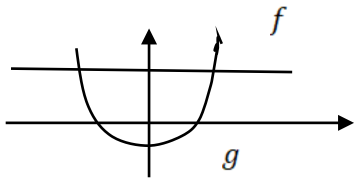
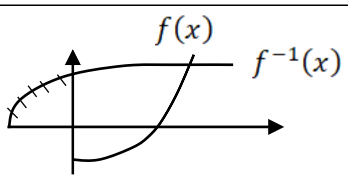
نمونه‌ای از بدفهمی‌های دانش‌آموزان در پاسخ به سؤال دوم آزمون	نمونه هایی از پاسخ های دانش‌آموزان
۱)عدم توانایی یافتن مقدار تابع در یک نقطه خاص	مقدار عبارت زیر را به دست آورید. $f(5)\times g(5)+f(-1)\times g(5)$ $=-2\times -2+1\times(-2)$
۲) تشخیص نادرست دامنه و برد توابع با بازنمایی جدولی	دامنه تابع f را بیابید. $D_f=\{5و۳و۶و-1و-2\}$
۳) درک نادرست از جمع وتفریق توابع با بازنمایی جدولی (جمع مولفه اول و دوم باهم)	با توجه به جدول، جمع و تفریق را حساب کنید. $f+g=(5-2)+(5-2)=6$
۴) دانش‌آموزان فکر می‌کنند که ضابطه تابع همواره باید درجه یک باشد	ضابطه دو تابع g ، f را بیابید. $f(x)\quad y-y_o=-3(x-1)$ $y=-3x+3$ $g(x)=-2x-1$
۵) عدم شناخت $f+g$ (دامنه جمع توابع)	دامنه $f+g$ را به دست آورید. $D=\{2,-1,0,1,2,3\}$
۶) عدم توانایی یافتن مقدار f^{-1}در یک نقطه خاص	مقدار عبارت $f^{-1}(0)$ را به دست آورید. $f^{-1}(0)=3$
۷) دانش‌آموزان فکر می‌کنند که نمودار توابع همواره باید پیوسته باشد.	نمودار تابع $f-g$ را رسم کنید.

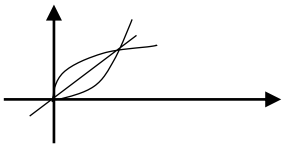
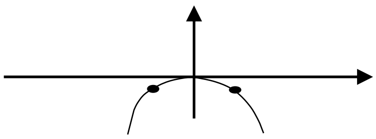


۸) عدم توجه به شرط وارون پذیری در بازنمایی جدولی توابع	مقدار عبارت زیر را به دست آورید. $\frac{g^{-1}(3)}{f(3)} = \frac{2}{0}$
۹) جمع مولفه‌های اول زوج مرتب‌ها در تشکیل تابع $f+g$ به جای مولفه دوم آن‌ها	**نمودار** $f+g$ را به صورت زوج مرتب بنویسید. $f+g = \{(4,5),(5,-1)\}$
۱۰) توابع را مجموعه‌ای از زوجهای مرتب تصور نمی‌کنند. دامنه در نوشتن تابع نادیده می‌گیرد	۱-با توجه به توابع $f\,,g$ تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید. $\frac{f}{g} = \left\{\frac{۵}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{3}, \frac{2}{-2}\right\}$ ۲-تابع fog رابیابید $fog = \{-1,3,6\}$

با توجه به جدول ۴، در سوال دوم آزمون، بیشتر بدفهمی‌های انجام شده مربوط به مسائل طرح شده برای اعمال جبری روی توابع و همچنین در ارتباط با پیوسته در نظر گرفتن نمودار توابع f و g می‌باشد. جدول ۵، بدفهمی‌های متداول دانش‌آموزان از مفهوم تابع را در پاسخ به سؤال ۳ نشان می‌دهد.

جدول۵: بدفهمی‌های متداول دانش‌آموزان از مفهوم تابع در پاسخ به سؤال ۳ آزمون

۳- با توجه به نمودار داده شده هر تعداد مسئله که میتوانید درارتباط با تابع شامل :(دامنه، برد، ضابطه، معکوس پذیری، جمع،تفریق،ضرب،تقسیم توابع و..) طرح کنید و ضمنا مسائل طرح شده خود را حل نمایید.	
نمونه‌ای از بدفهمی‌های دانش‌آموزان در پاسخ به سؤال سوم آزمون	نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانش‌آموزان
۱)عدم توانایی انتقال از شکل گرافیکی به شکل جبری	ضابطه تابع $f(x)$ را بیابید. $f(x) = (x+1)^2$
۲) عدم شناخت دامنه و برد وارون توابع	

۳) ترسیم نادرست دریک دامنه خاص	وارون تابع $f(x)$ را در دامنه (∞+و۰) رسم کنید. 
۴) عدم تشخیص درست دامنه وبرد این گونه توابع	دامنه تابع $f(x)$ رابنویسید. $D_f=[-1,1]$
۵) عدم توجه به شرط وارون پذیری در بازنمایی نموداری توابع	تابع وارون تابع $g(x)$ را بیابید. $g(x)=3 \quad g^{-1}(x)=\frac{1}{3}$
۶) عدم توانایی ترسیم نمودار توابع با توجه به ضابطه آنها	به کمک انتقال $f(x)=-(x^2+1)$را رسم کنید. 

با توجه به جدول ۵، در سؤال سوم آزمون، بیشترین بدفهمی انجام شده در ارتباط با یافتن وارون تابع و رسم آن‌ها است.

بحث و نتیجه‌گیری

تابع از جمله مباحث پایه‌ای علوم ریاضی است که به سبب کاربردی بودن آن در زندگی بشر از اهمیت بسیاری برخوردار است. نگاهی بر ادبیات آموزش تابع نشان می‌دهد آموزش و فراگیری این مبحث، از جمله مباحث چالش‌برانگیز دنیای آموزش ریاضی است که دانش‌آموزان در یادگیری آن دچار اشتباهات مفهومی قابل توجهی می‌شوند. لذا شناسایی و رفع اشتباهات مفهومی در ابعاد مختلف آموزشیِ آن، همواره مورد توجه پژوهشگران (به عنوان مثال، هیت ، ۱۹۹۸؛ دوگان دانلپ ، ۲۰۰۷؛ نان کلییرز، ۲۰۰۷؛ پترسون و همکاران، ۲۰۱۳؛ نولاسکو، ۲۰۱۸؛ تراجیلو و همکاران، ۲۰۲۳؛ حسامی، ۱۳۹۵) است و می‌تواند اثرات سازنده‌ای در آموزش و فراگیری آن داشته باشد. پس از بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤالات آزمون مشخص گردید اکثر مسائلی که دانش‌آموزان طرح کرده بودند، مشابه یکدیگر بوده و مسائل، تنوع کمی داشتند. این امر می‌تواند به این دلیل باشد که هنگام تدریس، مثال‌هایی که برای دانش‌آموزان ارائه می‌شود، از تنوع کمی برخوردار است. همچنین با توجه به داده‌ها درمی‌یابیم که بیشترین مسائل طرح شدهٔ درست، مربوط به سؤال اول آزمون است. این مطلب نشان دهنده آن است که طراحی سؤال در بازنمایی نمادی برای دانش‌آموزان راحت‌تر است. علاوه بر این، اگر چه مسائل طرح شده دانش‌آموزان در سؤال اول بیشتر از سؤال دوم و سوم آزمون است، ولی عملکرد دانش‌آموزان در پاسخ به سؤال اول آزمون در مقایسه با سؤالات دیگر، پایین‌تر بوده است. علت عملکرد پایین دانش‌آموزان در این سؤال، ممکن است به دلیل درک سطحی دانش‌آموزان از بازنمایی نمادی توابع نسبت به بقیه بازنمایی‌های تابع است.

همچنین نتایج مطالعه، نشان داد که اکثر دانش‌آموزان مفهوم تابع را به خوبی درک نکرده و مشکلات متفاوتی با این مفهوم دارند. عملکرد ضعیف برخی از دانش‌آموزان در پاسخ به سؤالات آزمون این نکته را به خوبی مشخص می‌کند که ساخت و سازهای مفهوم تابع در ذهن برخی از آن‌ها ناقص است. مشکل دیگر دانش‌آموزان با مفهوم تابع که در

تحقیقات (به عنوان مثال، دوگان دانلپ، ۲۰۰۷؛ پترسون و همکاران، ۲۰۱۳؛ تراجیلو و همکاران، ۲۰۲۳) بارها به آن پرداخته شده است اغلب ناشی از ابهام و برداشت‌های نادرستی است که دانش‌آموزان نسبت به مفهوم تابع دارند که حتی گاهی با دستورالعمل‌های جدید هم به سختی تغییر می‌کنند. این باورهای نادرست که در برخی از تحقیقات به نام بدفهمی‌ها از آنها یاد شده مانع بزرگی در درک مفهومی تابع است که اگر برطرف نشود ممکن است تا سالیان زیادی در ذهن دانش‌آموزان باقی بماند. همواره دانش‌آموزان مطالب ارائه شده در کلاس درس را از زاویهٔ دید خودشان می‌بینند و با توجه به باورها، دیدگاه‌ها و شرایطی که درآن قرار گرفته‌اند، برداشت‌های متفاوتی از موضوع مورد بحث دارند. این تفاوت برداشت‌ها، که بیشتر به باور دانش‌آموزان مربوط می‌شود، گاه ممکن است با واقعیت‌ها در تضاد باشد (والده، ۲۰۱۷؛ ویدادا، ۲۰۲۰؛ تراجیلو و همکاران، ۲۰۲۳). لذا بسیار ضروری است که معلم با طرحوارهٔ ذهنی دانش‌آموزان در ارتباط با مفاهیم مختلف ریاضی و باورها و درک دانش‌آموزان در ارتباط با این مفاهیم آشنا شود و در فرآیند آموزش و تدریس این مفاهیم از مثالها، نامثال‌ها (هی لاک و تنگاتا، ۱۳۹۹) و روش تدریسی استفاده کند که مانع از تشکیل بدفهمی‌ها و باورهای نادرست در ذهن دانش‌آموزان شوند (تراجیلو و همکاران، ۲۰۲۳).

با توجه به عملکرد دانش‌آموزان در طراحی سؤالات مختلف و با توجه به عواملی که برخی از محققان (به عنوان مثال، هیت، ۱۹۹۸؛ کلمنت، ۲۰۰۱؛ نولاسکو، ۲۰۱۸ ؛ پرهیزگار و همکاران، ۲۰۲۲؛ پترسون، ۲۰۱۲؛ پترسون و همکاران، ۲۰۱۳؛ پانائورا و همکاران، ۲۰۱۵؛ والده، ۲۰۱۷؛ ویدادا و همکاران، ۲۰۲۰؛ تراجیلو و همکاران، ۲۰۲۳؛ حسامی، ۱۳۹۵) برای بروز بدفهمی‌ها در ارتباط با تابع به آن اشاره کرده‌اند، می‌توان عوامل محتمل زیر را که سبب شد دانش‌آموزان در مواجهه با سوالات آزمون مسائل نادرست طرح نمایند و یا پاسخ‌های اشتباهی به مسائل طرح شده بدهند، به صورت زیر بیان نمود.

۱. عملکرد ضعیف در انتقال از بازنمایی گرافیکی به شکل جبری
۲. عملکرد ضعیف در انتقال از بازنمایی جبری به بازنمایی گرافیکی
۳. دانش‌آموزان درک ناقصی از دامنه و برد توابع در اشکال مختلف بازنمایی دارند.
۴. دانش‌آموزان درک نادرستی از اعمال جبری توابع(+، -، o،.) دارند.
۵. دانش‌آموزان قادر به مطابقت بازنمایی جبری با نمودار نیستند، تصورات غلطی در مورد مفهوم توابع دارند.
۶. مشکل دیگر دانش‌آموزان با مفهوم تابع، عدم تشخیص بین مفهوم تابع و مفهوم معادله است.
۷. بعضی از دانش‌آموزان بدون داشتن درک صحیحی از تعریف‌ها و روش‌ها آن‌ها را فقط حفظ کرده‌اند. برای مثال می‌توان به روش ترسیم تابع معکوس اشاره کنیم.
۸. دانش‌آموزان نسبت به این نکته که توابع نمایی و لگاریتمی معکوس یکدیکرند آگاهی ندارند.
۹. دانش‌آموزان به این نکته توجه ندارند که توابع ثابت با دامنه مجموعه اعداد حقیقی وارون‌پذیر نمی‌باشند.
۱۰. دانش‌آموزان درک سطحی از یافتن معکوس توابع و طریقه ترسیم آن دارند.
۱۱. دانش‌آموزان شناخت ناکافی از توابع با دامنه گسسته دارند.
۱۲. دانش‌آموزان با شرایط تساوی دو تابع آشنایی کافی ندارند.
۱۳. دانش‌آموزان توانایی رسم توابع را به درستی ندارند.
۱۴. دانش‌آموزان نمی‌توانند مقادیر تابع را در بازنمایی‌های متفاوت تابع به دست آورند.
۱۵. دانش‌آموزان در یافتن تابع معکوس به ترتیب انجام الویت عملگرها توجه نمی‌کنند.
۱۶. دانش‌آموزان تمایزی بین توابع f^(-1)، f- وf - قائل نیستند.

بنا بر آنچه در ادبیات تحقیق بیان گردید و با توجه به نتایج به‌دست آمده از آزمون پژوهش و بدفهمی‌های انجام شده توسط دانش‌آموزان نتیجه می‌شود که درک دانش‌آموزان در مفهوم تابع با بازنمایی‌های مختلف آن در سطح درک بصری و تا حدودی درک ارتباطی می‌باشند. یافته‌های پژوهش حاضر، با یافته‌های پژوهش بسیاری از محققان (از جمله

هیت، ۱۹۹۸؛ پانائورا و همکاران، ۲۰۱۵؛ والده، ۲۰۱۷؛ نولاسکو، ۲۰۱۸؛ پرهیزگار و همکاران، ۲۰۲۲؛ تراجیلو و همکاران، ۲۰۲۳) هم خوانی دارد. دلیل این هماهنگی آن است که این محققان در تحقیق خود به این نتیجه رسیدند که دانش‌آموزان در انتقال تابع از بازنمایی گرافیکی به بازنمایی جبری عملکرد ضعیفی دارند. همچنین این پژوهشگران در پژوهش خود به این مطلب دست یافتند که دانش‌آموزان نمی‌توانند دامنه و برد توابع و رابطهٔ بین این دو را به درستی بیابند. به عنوان مثال، برخی از دانش‌آموزان درک نمی‌کنند که محدودیت دامنه بر برد اثر می‌گذارد.

برخی از پژوهشگران نیز همچون نولاسکو (۲۰۱۸) و تراجیلو و همکاران (۲۰۲۳) نیز در تحقیق خود به این نکته اشاره دارد که معمولاً دانش‌آموزان در یافتن تابع معکوس با الویت انجام عملگرها مشکل دارند و هنگامی که دانش‌آموزان با نماد f -1 (x) مواجه می‌شوند، برخی از آن‌ها گمان می‌کنندکه این نماد به معنای ۱/(f (x)) است. لازم به ذکر است که عوامل دیگری مانند تجربهٔ تدریس معلم، دانش قبلی دانش‌آموزان و سبک تدریس نیز در تشکیل برخی بدفهمی‌ها وجود دارد (پترسون، ۲۰۱۲).

براساس یافته‌های این مطالعه و مطالعات دیگر(به عنوان مثال، کلمنت، ۲۰۰۱؛ پترسون، ۲۰۱۲؛ تراجیلو و همکاران، ۲۰۲۳)که به بررسی درک دانش‌آموزان و بدفهمی آن‌ها در ارتباط با مفهوم تابع در ریاضیات می‌پردازند، می‌توان گفت که

۱- به طور کلی ابزارهای تشخیصی می‌توانند اطلاعات مفیدی را در مورد درک دانش‌آموزان از مفاهیم کلیدی و همچنین هر گونه بدفهمی در مورد مفاهیم پایه به معلمان ارائه دهند؛ به گونه‌ای که معلم می‌تواند از اطلاعات به دست آمده از این ارزیابی برای اتخاذ تصمیمات آموزشی استفاده نماید. درواقع معلم باید بداند یکی از پیامدهای مهم استفاده از ابزارهای تشخیصی و ارزشیابی پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان استفاده از نتایج حاصل برای بهبود آموزش معلم است. درست است که سنجش و ارزشیابی عملکرد یادگیرندگان عمدتاً با هدف تعیین کم وکیف یادگیری آنان صورت می‌پذیرد، اما نتایج حاصل برای داوری درباره اثربخشی فعالیت‌های آموزشی معلم نیز قابل استفاده است.

۲- دبیران قبل از تدریس، بر اساس تجربه و درایت خود، بدفهمی،های بالقوه دانش‌آموزان را شناسایی کنند و روش تدریس خود را به گونه‌ای انتخاب کنند که علاوه بر آنکه دانش‌آموزان مطالب پیش نیاز را فرا گیرند، بروز بدفهمی‌هایشان نیز به حداقل برسد. برای تحقق چنین اهدافی لازم است معلم بعضی درسهای گذشته را مرور کند، زمان بیشتری را صرف تدریس کند یا ترتیب و توالی موضوعات درسی را به منظور پی‌گیری اهداف مختلف آموزشی تغییر دهد.

۳-به طور خاص در ارتباط با مفهوم تابع، چنانچه معلمان با تصورات اشتباه و بدفهمی‌های دانش‌آموزان نسبت به مفهوم تابع آشنا شوند، این آشنایی و آگاهی می‌تواند به برطرف کردن مشکلات و پیچیدگی‌ها در فهم تابع که در ذهن دانش‌آموزان شکل می‌گیرد کمک کند.

۴-همچنین با توجه به عملکرد دانش‌آموزان در این پژوهش و پژوهش‌های دیگر، معلمان می‌توانند برای آموزش مفهوم تابع از مثال‌های متفاوت شامل بازنمایی‌های مختلف تابع و تبدیل این بازنمایی‌ها به یکدیگر استفاده کنند و در نتیجه درک مفهومی دانش‌آموزان بالا رود. نگاه همه جانبه و فراگیر به شناخت و توجه به اشکال گوناگون بازنمایی در نظام آموزشی از جنبه لحاظ کردن تفاوتهای فردی دانش‌آموزان نیز دارای اهمیت است. دانش‌آموزان دارای توانایی و استعدادهای متفاوتی هستند. اگر آنان در مدرسه گزینه ها و فرصتهای گوناگونی بیابند قادر خواهند بود تا از این تفاوتهای فردی خود به نحو مناسب بهره ببرند. عدالت تربیتی به معنی آن نیست که برنامه‌های مشابه و فعالیت‌های یکسان بر ای همه دانش‌آموزان در نظر گرفته شود. به رسمیت شناختن و ارج گذاشتن بر شیوه‌های گوناگون بازنمایی مجالی برای دانش آموزان فراهم می آورد تا خود را بیابند، علائق و زمینه‌هایی را که در آن مستعدترند پیدا کنند و سایر ابعاد وجودی خود را بپرورانند.

۵-با توجه به اینکه توانایی مهارت طرح مساله نسبت به حل مساله در سطح بالاتری قرار می‌گیرد و از آنجا که این

فرایند می‌تواند به عنوان یک ابزار یادگیری و ارزیابی در فعالیت‌های آموزشی نقش بسزایی را ایفا کند، بنابراین شایسته است تا معلمان از این امر غافل نباشند و این فرایند را در آموزش‌های رسمی و به خصوص کلاس‌های درس وارد نمایند تا سیستم آموزشی از فواید و تأثیرات مثبت آن بهره‌مند شود. در واقع، به چالش کشیدن دانش‌آموزان با تکالیف طرح مساله، باعث می‌شود که نه تنها معلمان نسبت به درک دانش‌آموزان از مفاهیم ریاضی و همچنین بدفهمی‌های آنان در مباحث مختلف آگاهی یابند، حتی خود دانش‌آموز نیز به این آگاهی دست یابد.

در نهایت، بر اساس یافته‌های این مطالعه پیشنهاد می‌شود که در پژوهش‌های بعدی به طور کیفی و دقیق‌تر به دنبال علت بروز بدفهمی‌های دانش‌آموزان در ارتباط با مفهوم تابع بود. همچنین می‌توان بررسی کرد که شیوه‌های مؤثر و تأثیرگذار در اصلاح بدفهمی‌های دانش‌آموزان چیست. علاوه بر این، می‌توان بررسی نمود که معلم چگونه از بازنمایی‌های چندگانه استفاده کند تا یادگیری دانش‌آموزان، ارتقاء یابد.

مشارکت نویسندگان

میزان مشارکت نویسندگان در نگارش مقاله به صورت ۶۰ درصد برای نویسنده اول و ۴۰ درصد اجرای پژوهش و نگارش مقاله، با نویسنده دوم بوده است.

تعارض منافع

«هیچ‌گونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است»

References

Acevedo Nanclares, J. I. (2008). *Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en eldiscurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones* (Doctoral dissertation, Universitat de Arcelona).

Ahmadi, S. (2016). Analysis of the content of the 10th grade math book. Master's thesis, Shahid Rajaee Tarbiat University. Faculty of Science, Tehran. [In Persian]

Avila, C. (2013). *Secondary and post-secondary calculus instructors' expectations of studentknowledge of functions: A multiple case study*. Retrieved from ProQuest Dissertations and Theses.

Brown, S. I., & Walter, M. I. (2005). *The Art of Problem Posing* (3rd ed.). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Cai, J. (2003). Singaporean students' mathematical thinking in problem solving and problem posing: An exploratory study. *Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(5), 719-737.

Cai, J., Jiang, C., Hwang, S., Nie, B., & Hu, D. (2016). How do textbooks incorporatemathematical problem posing? An international comparative study. *Posing and solving mathematical problems: Advances and new perspectives*, 3-22.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM*, *37*(3), 149-158.

Clement, L. L. (2001). Connecting research to teaching: What do students really know about functions?. *The Mathematics Teacher*, *94*(9), 745-748

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(3), 243-270.

Dogan-Dunlap, H. (2007). Reasoning with metaphors and constructing an understanding of he mathematical function concept. In *Proceedings of the 31st Conference of the nternational Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 209-6).

El Sayed, R. A. E. (2002). Effectiveness of problem posing strategies on prospective mathematics teachers' problem solving performance. *Journal of science and mathematics education in Southeast Asia*, *25*(1), 56-69.

Goya, M. (1382). The concept of function and students' misunderstanding. Journal of Mathematics Education Development, 72, 23-2. [In Persian]

Haylock, D. Tangata, F. (2019). (Translators: Zahra Goya, Mohammad Hessam Ghasemi). Key concepts in teaching elementary school mathematics. School publications . [InPersian]

Hesami, J. (2015). Investigating the third-year experimental male students'understanding of heconcept of function in the framework of APOS theory. Master's thesis, ShahidRajaee University. [In Persian]

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 123-134.

Keşan, C., Kaya, D., & Güvercin, S. (2010). The effect of problem posing approach to the gifted student's mathematical abilities. *International Online Journal of Educational Science*, 2(3), 677-787.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA.

Nolasco, J. (2018). *The struggle with inverse functions doing and undoing process.* Electronic Theses, Projects, and Dissertations. 652. http://scholarworks.lib.csusb.edu/etd/652

Oylum, C. A. (2004). *The effects of multiple representations-based instructions on several grade students' algebra performance, attitude toward mathematics, and representation preference*. Doctoral dissertation, Middle east technical university, Özkan, E. M. (2011). Misconceptions in radicals in high school mathematics. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *15*, 120-127.

Parhizgar, Z., Dehbashi, A., Liljedahl, P., & Alamolhodaei, H. (2022). Exploring students' misconceptions of the function concept through problem-posing tasks and their views thereon. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(12), 3261-3285.

Parhizgar, B.Z. (2007). Students' understanding of the main concept of function. Master's hesis, Shahid Beheshti University, Faculty of Mathematical and Computer Sciences,Tehran. [In Persian]

Pettersson, K. (2012). *The threshold concept function – A case study of a student'sdevelopment of her nderstanding.* Paper presented at Madif 8, January 25, Umeå,Sweden. To appear in the proceedings.

Pettersson, K., Stadler, E., & Tambour, T. (2013). Transformation of students' discourse on the threshold concept of function. In *Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8), Manavgat/Side, Turkey, 6-10 February, 2013* (pp. 2406-2415). Middl EastTechnical University and ERME.

Rau, M. A., Aleven, V., & Rummel, N. (2015). Successful learning with multiple graphical representations and self- planation prompts. *Journal of Educational Psychology, 107(1), 30–46. doi:10.1037/a0037211.*

Rau, M. A., & Matthews, P. G. (2017). How to make 'more'better? Principles for effective use of multiple representations to enhance students' learning about fractions. *ZDM*, *49*,531.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14(1)*, 19–28.

Singer, F. M. (2007). Beyond conceptual change: Using representations to integrate domain-specific structural models in learning mathematics. *Mind, Brain, and Education*, *1*(2), 84-97.

Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. *Technology in mathematics education*, 518-525.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limit and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, pp. 15.

Thomas, M. O., de Freitas Druck, I., Huillet, D., Ju, M. K., Nardi, E., Rasmussen, C., & Xie, J. (2015). Key mathematical concepts in the transition from secondary school to university. In *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education: Intellectual and attitudinal challenges* (pp. 265-284). Springer International Publishing.

Tofighi, M. (1387). Investigating the misunderstandings of the second grade students of experimental and mathematical fields about the concept of function in Estehban city, master's thesis. Shahid Rajaee Tarbiat University, Faculty of Basic Sciences, Tehran. In Persian].

Tripathi,P.N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the middle school*, *13*(8), 438-445.

Trujillo, M., Atarés, L., Canet, M. J., & Pérez-Pascual, M. A. (2023). learning difficulties with he concept of function in maths: A literature review. *Education Sciences*, *13*(5), 495. https://doi.org/10.3390/educsci13050495.

Walde, G. S. (2017). Difficulties of concept of function: The case of general secondary school students of Ethiopia. *International Journal of Scientific & Engineering research*, *8*(4),1-10.

Widada, W., Herawati, A., Fata, R., Nurhasanah, S., Yanty, E. P., & Suharno, A. S. (2020). Students' understanding of the concept of function and mapping. . In*Journal of Physics: Conference Series*(Vol. 1657, No. 1, p. 012072). IOP Publishing. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1657/1/012072.