Research in Mathematics Education

ORIGINAL REVIEW PAPER

Introducing SOLO Theory Focusing on its Application in Geometry

***A. Mohabatpanah*[1], *N. Yaftian*[*, 2]**

[1] *Mathematics Teacher in Tehran Province & Ph.D. Student in Mathematics Education, Faculty of Science, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran*
[2] *Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran*

Keywords:
. Thinking Modes
. Response levels
. SOLO Theory
. van Hiele Theory
. Geometry

[2]. Corresponding author
yaftian@sru.ac.ir

ABSTRACT

Objective: To facilitate the deep learning of mathematics among learners, it is imperative to make an effort to comprehend the developmental conditions and assess their thinking levels. Numerous theories exist that describe the growth and thinking levels of learners. Among these theories, the Structure of the Observed Learning Outcome (SOLO) taxonomy stands out as a highly practical approach. SOLO serves as a valuable instrument for evaluating the quality of individuals' responses when solving problem. The purpose of this article is to describe this theory, focusing on its application in geometry and its importance in the teaching and learning process, and to make a comparison between SOLO theory and van Hiele theory. **Background:** SOLO taxonomy, based on two characteristics examines the learner's understanding of mathematical concepts. The initial characteristic is related to the various levels of an individual's response or capacity to respond, which are categorized into five distinct levels: pre-structural, uni-structural, multi-structural, relational, and extended abstract. The second characteristic is related to the mode of thinking, whereby it is believed that learning takes place through one of the five modes of thinking: sensory-motor, iconic, concrete symbolic, formal, and post formal. While SOLO theory is applicable to all mathematical subjects, including geometry, there is limited research on its application in the realm of geometry. Most studies instead concentrate on van Hiele's theory when evaluating the various levels of geometric thinking. **Method:** In this review article, which has been done using a library method, the SOLO and van Hiele theories and their comparison are discussed based on valid studies. **Findings:** The aim is to provide planners and teachers with a new view on the level of geometric thinking. Moreover, it offers valuable insights for reviewing the geometry teaching process and evaluating learners' geometric thinking levels.

ISSN (Online): 2783-4379 **DOI: 10.48310/RME.2024.16006.1080**

Received: 2024/04/17
Reviewed: 2024/05/12
Accepted: 2024/06/04
PP: 51- 70

Citation (APA): Mohabatpanah1, A., Yaftian, N. (2023). Introducing SOLO Theory Focusing on its Application in Geometry. *Research in Mathematics Education* , *3*(1), 51-70.
10.48310/RME.2024.16006.1080

معرفی نظریه سولو با تمرکز بر بکارگیری آن در هندسه

مقاله مروری

افسانه محبت‌پناه[1]، نرگس یافتیان[2,*]

۱. دبیر ریاضی آموزش و پرورش استان تهران و دانشجوی دکتری آموزش ریاضی گروه ریاضی دانشکده علوم پایه دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران،

۲. دانشیار گروه ریاضی دانشکده علوم پایه دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران،

چکیده

هدف: برای تحقق یادگیری عمیق ریاضیات، تلاش برای درک شرایط رشد و ارزیابی سطح تفکر فراگیران ضروری است. نظریه‌های متعددی وجود دارد که سطح رشد و تفکر فراگیران را توصیف می‌کند. یکی از کاربردی‌ترین نظریه‌ها، طبقه‌بندی ساختار نتایج یادگیری مشاهده شده یا به اختصار سولو است. سولو به عنوان ابزاری برای ارزیابی کیفیت پاسخ‌های افراد به هنگام حل مسئله کاربرد دارد. هدف مقاله حاضر آن است که به شرح این نظریه با تمرکز بر بکارگیری آن در هندسه و اهمیت آن در فرآیند یاددهی-یادگیری بپردازد و مقایسه‌ای بین نظریه سولو و نظریه سطوح تفکر هندسی فن‌هیلی داشته باشد. **پیشینه:** طبقه‌بندی سولو براساس دو ویژگی، درک یادگیرنده را از مفاهیم ریاضی مورد بررسی قرار می‌دهد. ویژگی نخست، سطوح پاسخ فرد یا توانایی وی در پاسخ‌گویی است که به پنج سطح پیش‌ساختاری، تک‌ساختاری، چندساختاری، رابطه‌ای و انتزاع تعمیم-یافته طبقه‌بندی می‌شود. ویژگی دوم، مربوط به نوع تفکر است که بر این اساس، فرض می‌شود یادگیری در یکی از پنج حالتِ تفکر تحت عنوان‌های حسی-حرکتی، تصویری، عینی-نمادین، صوری و فراصوری رخ می‌دهد. با این‌که نظریه سولو در همه مباحث ریاضی از جمله هندسه کاربردی است، اما منابع پژوهشی به ندرت در زمینه هندسه به آن پرداخته‌اند و تمرکز اکثر آن‌ها، در زمینه ارزیابی سطوح تفکر هندسی، بر نظریه فن‌هیلی است. **روش:** در این مقاله مروری که به روش کتابخانه‌ای انجام شده است، به بحث پیرامون نظریه‌های سولو و فن‌هیلی و مقایسه آن‌ها بر اساس پژوهش‌های معتبر پرداخته شده است. **نتایج کلی و کلیدی:** امید است مطالعه این مقاله دیدگاه جدیدی را برای برنامه‌ریزان و معلمان درخصوص سطح تفکر هندسی آشکار کند و در بازبینی فرآیند آموزش هندسه و ارزیابی سطح تفکر هندسی فراگیران، سودمند باشد.

DOI:10.48310/RME.2024.16006.1080

واژه‌های کلیدی:
. حالت‌های تفکر
. سطوح پاسخ
. نظریه سولو
. نظریه فن‌هیلی
. هندسه

۲. نویسنده مسئول
yaftian@sru.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۱/۲۹
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۰۲/۲۳
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۳/۱۵
شماره صفحات: ۵۱- ۷۰

مقدمه

از دیرباز تا به امروز پرسش‌های متعددی در ارتباط با چگونگی یادگیری مفاهیم ریاضی و فعل و انفعالاتی که در ذهن یادگیرنده در طی یادگیری مفاهیم ریاضی رخ می‌دهد، مطرح شده که پاسخ به آن‌ها ذهن بسیاری از محققان آموزش ریاضی و معلمان را به خود مشغول کرده است. از طرفی نظریه‌های گوناگونی برای توضیح در مورد توسعه شناختی مفاهیم در آموزش (از جمله آموزش ریاضی) مانند نظریه مرحله‌ای پیاژه و نظریه ساختار نتایج یادگیری مشاهده شده[1] یا به اختصار سولو و یا مانند نظریه توسعه تفکر هندسی فن‌هیلی[2] که خاص آموزش ریاضی است، مطرح شده است. یکی از کاربردی‌ترین این نظریه‌ها که نتایج یادگیری و سطح رشد را مورد ارزیابی قرار می‌دهد، طبقه‌بندی سولو است که ارزیابی افراد براساس کیفیت درک و یادگیری آن‌ها یک اصل اساسی در این نظریه است. تمرکز این ارزیابی بر نتایجی است که از دانش‌آموزان انتظار می‌رود، کسب کرده باشند. نکته مهم دیگر در این نظریه، رویکرد مبتنی بر رشد شناختی برای این ارزیابی است (Reading & Lawrie, 2004).

بیگز و کولیس (Biggs and Collis, 1982) براساس تجزیه و تحلیل اولیه بر روی پاسخ‌های حل مسئله افراد در سطوح مختلف آموزشی، متوجه شدند که با دو ویژگی متمایز سروکار دارند و بدین ترتیب طبقه‌بندی سولو توسط آن‌ها ابداع شد (Mukuka et al, 2020). در این طبقه‌بندی ارزیابی پاسخ‌های فراگیران براساس دو ویژگی «سطوح پاسخ» و «حالت تفکر» انجام می‌شود. ویژگی اول، سطوح پاسخ فرد یا توانایی وی در پاسخگویی است که به پنج سطح سلسله مراتبی پیش‌ساختاری[3]، تک‌ساختاری[4]، چندساختاری[5]، رابطه‌ای[6] و انتزاع تعمیم‌یافته[7] طبقه‌بندی می‌شود. پاسخ فرد با افزایش پیچیدگی به سطوح بالاتری می‌رسد، زیرا طبقه‌بندی سولو سطوح درک تدریجی را توصیف می‌کند (Caniglia & Meadows, 2018). ویژگی دوم یعنی حالت تفکر، مربوط به ماهیت یا انتزاعی بودن پاسخ است و آن دسته از عملکرد-های فرد است که براساس تفکر انجام می‌شود و یادگیرنده برای پرداختن به یک محرک خاص به آن نیاز دارد. رشد توانایی‌های شناختی در یادگیرنده، نتیجه فرآیندهایی از تأثیرات بین او با خودش یا محیط اجتماعی وی و محیط فیزیکی او است. توانایی‌های شناختی را می‌توان به عنوان روند فکری یا فعالیت فکری فرد تعریف کرد که به طور مستقیم از بیرون قابل مشاهده نیست، اما می‌توان این توانایی‌ها را با توجه به نوع و کیفیت پاسخ داده شده، شناسایی کرد (Agustin et al, 2019). طبق ویژگی حالت‌های تفکر طبقه‌بندی سولو، فرض می‌شود که یادگیری در یکی از پنج حالتی اتفاق می‌افتد که تحت عنوان‌های حسی-حرکتی[8]، تصویری[9]، عینی-نمادین[10]، صوری[11] و فراصوری[12] معرفی می‌شوند. سطوح پاسخ‌ها و حالت‌های تفکر که در نظریه سولو مطرح می‌شوند، با هم مرتبط هستند که در ادامه توضیح هر یک بیان می‌گردد.

---

[1] structure of Observed Learning Outcome (SOLO)
[2] van Hiele
[3] pre-structural
[4] uni-structural
[5] multi-structural
[6] relational
[7] extended abstract
[8] seneori motor
[9] iconic
[10] concrete symbolic
[11] formal
[12] post formal

سطوح پاسخ طبقه‌بندی سولو

ویژگی اول نظریه سولو، توصیفی سلسه مراتبی در مورد ساختار یک پاسخ ارائه می‌دهد. به عبارتی، این ویژگی مربوط به طبقه‌بندی ساختار پاسخ است که توصیف پنج سطح پاسخ در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱: تشریح سطوح پاسخ در طبقه‌بندی سولو (Elazzabi & kaçar, 2020)

سطوح پاسخ	توصیف
پیش‌ساختاری	اطلاعات یادگیرنده سطحی است و نمی‌تواند مسئله را درک کند و یا برداشت نادرستی از مسئله دارد. همچنین معمولاً پاسخی که وی می‌دهد مربوط به مسئله مورد نظر نیست.
تک‌ساختاری	درک یادگیرنده از مسئله محدود است و معمولاً تنها روی یک جنبه از مسئله تمرکز دارد. وی می‌تواند بین اجزای مسئله، رابطه‌ای برقرار کند اما این روابط بسیار سطحی هستند.
چندساختاری	یادگیرنده می‌تواند روابط پیچیده‌تری ایجاد کند و بیش از یک جنبه از مسئله را در نظر بگیرد، اما نمی‌تواند این جنبه‌ها را به یکدیگر ارتباط دهد.
رابطه‌ای	یادگیرنده تمام جنبه‌های مسئله را در ارتباط با پاسخ ارائه می‌دهد و می‌تواند این جنبه‌ها را در این سطح به هم ارتباط دهد.
انتزاع تعمیم-یافته	یادگیرنده چیزهای جدیدی خلق می‌کند و فراتر از مسئله پیش می‌رود تا راه‌حل جدیدی برای مسئله ارائه دهد.

برای درک بهتر موضوع، در ادامه سطوح مختلف پاسخ همراه با مثالی از پژوهش یورتیاپان و ایلماز (Yurtyapan and Yilmaz, 2021) بیان شده است. یورتیاپان و ایلماز پژوهشی در یکی از دانشگاه‌های غرب ترکیه به منظور بررسی سطح تفکر هندسی دانشجو معلمان ریاضی با توجه به طبقه‌بندی سولو انجام داده‌اند. در این پژوهش، دو مسئله ریاضی بازپاسخ از مفاهیم هندسی و مرتبط با بیماری کووید ۱۹ به این دانشجو معلمان ارائه شد که در شکل ۱ مسئله اول این پژوهش مشاهده می‌شود.

مسئله اول: کارشناسان اظهار داشته‌اند که به دلیل شیوع بیماری کووید ۱۹، فاصله اجتماعی بین افراد باید حداقل دو متر باشد. احمد که از بستگان شماست یک آشپزخانه تهیه غذا دارد، ولی نمی‌داند که چگونه نقاط انتظار را برای فاصله اجتماعی مناسب تعیین کند تا بتواند جمعیت را در منطقه انتظار بیرون محل کار خود مدیریت کند. احمد با دانستن این‌که شما یک معلم ریاضی هستید، از شما می‌خواهد که نقاط انتظار را مطابق با قانون فاصله اجتماعی و با حداکثر مشتری در منطقه انتظار، همراه با نقاشی پیش‌نویس که فاصله آن‌ها را نشان می‌دهد، ترسیم کنید. چگونه به احمد کمک می‌کنید؟ با جزئیات توضیح دهید.

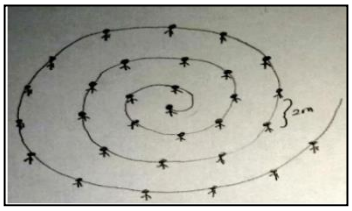
شکل۱: مسئله اول آزمون پژوهش (Yurtyapan & Yilmaz, 2021)

-**پیش‌ساختاری:** در سطح پیش‌ساختاری فرد از داده‌های نادرست یا فرآیندهای نادرست و نامرتبط برای حل مسئله استفاده می‌کند و پاسخی که وی می‌دهد مربوط به مسئله مورد نظر نیست (Saputra et al, 2019). در شکل ۲ نمونه‌ای از پاسخ دانشجو معلمان به مسئله شکل ۱ در سطح پیش‌ساختاری نشان داده شده است.

شکل ۲: نمونه پاسخ در سطح پیش‌ساختاری (Yurtyapan & Yilmaz, 2021, p 195)

دانشجو معلم در توضیح پاسخ شکل ۲ فقط به تهیه علامت هشدار فاصله اجتماعی برای حفظ سلامتی اشاره کرده و در خصوص محل دقیق نصب این علامت به طوریکه حداکثر جمعیت در منطقه انتظار قرار گیرند، توضیحی نداده است. در واقع، پاسخ این دانشجو معلم حاکی از آن است که وی متوجه خواسته مسئله نشده و از مفاهیم ریاضی، از جمله مفاهیم هندسی استفاده نکرده و فقط یک تابلو نقاشی طراحی کرده است، پس پاسخی نامرتبط با مسئله ارائه داده است.

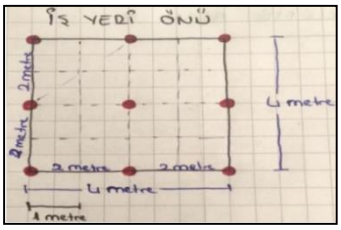
-**تک‌ساختاری:** در سطح تک‌ساختاری، فرد مسئله را به طور کامل درک نمی‌کند و می‌تواند فقط بخشی از اطلاعات مربوطه را در نظر بگیرد (Panizzon et al, 2007). افراد در این سطح، ممکن است صرفاً ایده‌هایی از قبل حفظ شده را به شیوه‌ای رویه‌ای و از پیش تعیین شده مورد استفاده قرار دهند (Reyhani, 2021). در شکل ۳ نمونه‌ای از پاسخ دانشجو معلمان به مسئله آزمون پژوهش یورتیاپان و ایلماز در سطح تک‌ساختاری نشان داده شده است.



شکل ۳: نمونه پاسخ در سطح تک‌ساختاری (Yurtyapan & Yilmaz, 2021, p 196)

دانشجو معلم در توضیح پاسخ شکل ۳ بیان کرده بود که نقاط منطبق با فاصله‌گذاری اجتماعی را می‌توان با یک طراحی مارپیچ ایجاد کرد، اما وی هیچ توضیحی در مورد فاصله بین نقاط روی یک مارپیچ و مارپیچ بعدی نداده است. در واقع وی فاصله بین افراد متوالی را در نظر گرفته ولی راجع به فاصله افراد روی یک مارپیچ با مارپیچ بعدی آن و همچنین حداکثر جمعیت، توضیحی نداده است، پس با توجه به این‌که فقط یک جنبه از مسئله را در نظر گرفته، پاسخ وی در سطح تک‌ساختاری طبقه‌بندی شده است.

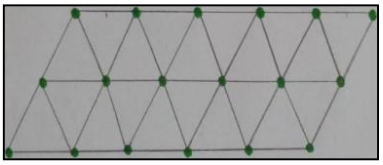
-**چندساختاری:** در سطح چندساختاری فرد از برخی اطلاعات و داده‌های مسئله استفاده می‌کند اما، نمی‌تواند اتصال و ارتباطی بین آن‌ها ایجاد کند (Saputra et al, 2019). در شکل ۴ نمونه‌ای از پاسخ دانشجو معلمان به مسئله آزمون پژوهش یورتیاپان و ایلماز در سطح چندساختاری نشان داده شده است.



شکل۴: نمونه پاسخ در سطح چندساختاری (Yurtyapan & Yilmaz, 2021, p 197)

دانشجو معلم در توضیح پاسخ شکل ۴ بیان کرده بود که ابتدا، فرض کرده‌ایم که منطقه انتظار مقابلِ محل کار احمد، ۱۶ متر مربع است. از آن جا که بین هر دو نفر حداقل ۲ متر فاصله وجود دارد، نقاطی را که این فاصله همزمان از راست، چپ یا مورب با نقاط دیگر دارد، با یک نقطه قرمز مشخص کرده‌ایم تا به عنوان یک نقطه انتظار برای هر مشتری باشد. اگرچه این پاسخ به فاصله‌گذاری اجتماعی ۲ متر از جهت‌های مختلف اشاره کرده است ولی، توضیح یا ترسیمی راجع به حداکثر افرادی که در این مسئله خواسته شده بود، نداده است. بنابراین پاسخ در سطح چندساختاری قرار گرفته است.

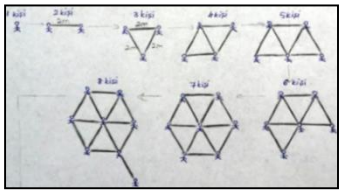
-**رابطه‌ای:** در سطح رابطه‌ای فرد از همه داده‌ها و اطلاعاتی که منجر به پاسخ می‌شود استفاده می‌کند و مسئله و رابطه بین داده‌های آن را کاملاً درک می‌کند (Ozdemir & Yildiz, 2015). در شکل ۵ نمونه‌ای از پاسخ دانشجو معلمان به مسئله آزمون پژوهش یورتیاپان و ایلماز در سطح رابطه‌ای نشان داده شده است.



شکل۵ : نمونه پاسخ در سطح رابطه‌ای (Yurtyapan & Yilmaz, 2021, p 198)

دانشجو معلم در توضیح پاسخ شکل ۵ بیان کرده بود که از یک مثلث متساوی‌الاضلاع با اضلاع ۲ متر استفاده کرده است. به این ترتیب، قانون فاصله‌گذاری ۲ متر رعایت خواهد شد و بیش‌ترین تعداد افراد را در کوچک‌ترین منطقه خواهیم داشت. چنین پاسخی که همه جنبه‌های مسئله را در نظر گرفته و با ترسیم هندسی مناسبی پاسخ درستی رسم کرده است، در سطح رابطه‌ای قرار می‌گیرد.

-**انتزاع تعمیم‌یافته:** در سطح انتزاع تعمیم‌یافته، فرد می‌تواند فراتر از اطلاعات مسئله بیندیشد و زمانی که به راه‌حل رسید آن را تعمیم دهد (Ozdemir & Yildiz, 2015). در شکل ۶ نمونه‌ای از پاسخ دانشجو معلمان به مسئله آزمون پژوهش یورتیاپان و ایلماز در سطح انتزاع تعمیم‌یافته نشان داده شده است.



شکل ۶: نمونه پاسخ در سطح انتزاع تعمیم‌یافته (Yurtyapan & Yilmaz, 2021, p 199)

دانشجو معلم در توضیح پاسخ شکل ۶ بیان کرده بود شکلی که برای حل مسئله می‌توان از آن استفاده کرد یک شش ضلعی منتظم است. زیرا به طور مشابه زنبورها در طبیعت به شکل یک شش ضلعی منتظم لانه درست می‌کنند و یک لانه زنبور متشکل از سلول‌های شش ضلعی منتظم است که بیش‌ترین ذخیره عسل را با حداقل موم فراهم می‌کند. شش ضلعی منتظم نشان داده شده در شکل ۶ که از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع تشکیل شده است، این اطمینان را می‌دهد که فاصله بین هر شخص ۲ متر است. برخلاف سایر پاسخ‌ها، مشاهده می‌شود که در پاسخ شکل ۶، دانشجو معلم فراتر از زمینه مسئله فکر کرده است و با در نظر گرفتن این نکته که در لانه زنبور نیز از کم‌ترین فضا برای بیش‌ترین حجم استفاده می‌شود، پیوندی بین زندگی واقعی و مسئله ریاضی ایجاد کرده است. نکته حائز اهمیت در این پژوهش این است که اکثر پاسخ‌های داده شده به مسئله شکل ۱ در سطح پیش‌ساختاری، تک‌ساختاری وچندساختاری بوده است که به بیان دیگر، بیشتر پاسخ‌ها منعکس‌کننده یادگیری کمّی[1]هستند. علاوه بر این، پاسخ‌های در سطح انتزاع تعمیم‌یافته مربوط تفکر زمینه‌ای و فراتر رفتن از مسئله است که در این پژوهش تعداد اندکی پاسخ (حدود سه درصد) در این سطح مشاهده شد.

از آن‌جاییکه سطح پیش‌ساختاری به یک نتیجه تقریبا بی‌ربط منجر می‌شود، عملاً می‌توانیم آن را از طبقه‌بندی کنار بگذاریم (Biggs & Collis, 1982). دو سطح بعدی یعنی تک‌ساختاری و چندساختاری، هر دو مراحلی از درک سطحی هستند که در آن دانش، بیش‌تر از نظر کمّی ایجاد می‌شود. دو سطح آخر یعنی رابطه‌ای و انتزاع تعمیم‌یافته، به دلیل یکپارچه‌سازی، ارتباط و افزایش انتزاع، بر کیفیت دانش تأکید دارند (Haghjoo & Reyhani, 2020). زیرا همان‌طور که ذکر شد زمانی که فراگیران بر روی یک جنبه واحد موضوع متمرکز هستند در سطح تک‌ساختاری و آن‌ها که می‌توانند بسیاری از جنبه‌های موضوع را بدون ایجاد ارتباط در نظر بگیرند در سطح چندساختاری قرار می‌گیرند (Çetin & İlhan, 2017). از طرفی در سطح رابطه‌ای، فراگیران می‌توانند تلفیق معنی‌داری از جنبه‌هایی که در چندساختاری درک کرده‌اند، ایجاد کنند و در سطح انتزاع تعمیم‌یافته، آن‌ها می‌توانند این دانش یکپارچه معنادار را به حوزه دیگری انتقال و تعمیم دهند، پس سطوح رابطه‌ای و انتزاع تعمیم‌یافته منعکس‌کننده جنبه کیفی یادگیری هستند (Brabrand & Dahl, 2009). در نتیجه از دیگر نقاط قوت این طبقه‌بندی آن است که هم کیفیت (یادگیری عمیق‌تر) و هم جنبه‌های کمّی (یادگیری سطحی) یادگیری را شناسایی می‌کند (Burnett, 1999, cited by Çetin & İlhan, 2017). البته، باید توجه داشت که سه سطح میانی جزو اهداف برنامه آموزشی مدرسه قرار می‌گیرند. زیرا پاسخ‌های انتزاع تعمیم‌یافته، فراتر و انتزاعی‌تر از آن چیزی است که در حال حاضر اهداف آموزشی مدرسه را تشکیل می‌دهد (Aslan, 2023؛ Biggs & Collis, 1989). در جدول ۲، لیستی از رفتارهایی که فراگیران در سطح‌های مختلف چارچوب سولو از خود بروز می‌دهند، ارائه شده است.

جدول۲: تشریح سطوح طبقه‌بندی سولو (Biggs & Collis, 1982)

سطوح سولو	توصیف
تک‌ساختاری	تعریف کردن، شناسایی کردن، محاسبه کردن(ساده)، شمردن، نام بردن، تشخیص دادن
چندساختاری	توصیف کردن، طبقه‌بندی کردن، لیست کردن، محاسبه کردن، حل کردن رویه‌ای
رابطه‌ای	تجزیه و تحلیل کردن، مقایسه کردن، توضیح دادن، تشخیص دادن جز/کل، ادغام کردن، ارتباط برقرار کردن، به کار بردن
انتزاع تعمیم‌یافته	پیش‌بینی کردن، فرضیه سازی کردن، تعمیم دادن، عمومی ساختن، انعکاس دادن به دامنه جدید، خلق کردن، حدس زدن

[1] quantitative learning

حالت‌های تفکر طبقه‌بندی سولو

توصیف حالت‌های تفکر در طبقه‌بندی سولو که ارتباط نزدیکی با مراحل رشد شناختی پیاژه دارد، به شرح زیر است (Biggs & Collis, 1989, 1991):

- حسی-حرکتی (شروع آن کمی پس از تولد): فرد نسبت به محیط فیزیکی تا حدودی عکس‌العمل نشان می‌دهد. در این حالت، نوزاد مهارت‌های حرکتی را کسب می‌نماید. درست است که یادگیری در طول سال اول زندگی بسیار پیچیده به نظر می‌رسد، اما این پیچیدگی مربوط به هماهنگی اقدامات با یکدیگر و محیط است. اگرچه شروع حالت حسی-حرکتی مربوط به دوران نوزادی است، ولی همچنان در طول زندگی، رشد این حالت ادامه دارد. به بیان دیگر، ما در طول زندگی خود، بسیار بیشتر از دوران نوزادی، مهارت‌های حرکتی را یاد می‌گیریم، اما در دوران نوزادی حالت حسی-حرکتی تنها حالت یادگیری است. این حالت بویژه در رابطه با ورزش یا سایر مهارت‌های جسمی در طول زندگی نقش دارد. به عنوان، مثال بازیکنان ورزشی می‌توانند یک عمل پیچیده را ماهرانه انجام دهند ولی حتی ممکن است نتوانند در مورد آن صحبت کنند. پس یادگیری در حالت حسی-حرکتی در طول زندگی در سطوح تک‌ساختاری، چند-ساختاری و رابطه‌ای رشد می‌کند.

- تصویری (شروع آن حدود ۲ سالگی): برای انتزاعی‌تر کردن یک عمل باید آن را به شکل تصاویر، درونی‌سازی کرد؛ ساده‌ترین درونی‌سازی یک عمل، تصور کردن آن با تشکیل یک تصویر ذهنی است. به همین دلیل، نسخه انتزاعی حالت حسی-حرکتی "تصویری" نامیده می‌شود که بعد از اولین سال زندگی، به کمک زبان (که پیش شرط لازم آن است) بعد از حدود ۱۸ ماهگی شروع به رخ دادن می‌کند. در این حالت، خردسال کلمات و تصاویری را می‌سازد که می‌توانند به جای اشیا و رویدادها قرار گیرند. کودکان خردسال در این حالت از داستان‌ها و شخصیت‌های افسانه‌ای برای توضیح تعاملات انسانی استفاده می‌کنند. همچنین، این حالت تفکر در همه جنبه‌های عملکردی که جنبه احساسی یا ارزشی دارد، مشهود است. شایان ذکر است که حالت تصویری صرفاً یک حالت مقدماتی از پردازش اطلاعات، محدود به اوایل کودکی نیست و نقش مهمی در تمام مراحل زندگی و مقاطع تحصیلی، ایفا می‌کند و منجر به نوعی دانش شهودی می‌شود. همانند حالت حسی-حرکتی، یادگیری در حالت تصویری نیز در سطوح تک‌ساختاری، چندساختاری و رابطه‌ای رشد می‌کند.

- عینی-نمادین (شروع آن حدود ۶ سالگی): این حالت شامل یک تغییر قابل توجه در انتزاع است؛ مفاهیم و عملکردها از طریق سیستم‌های نمادین مانند زبان نوشتاری و اعداد در جهان عینی، نمایان می‌شوند. به عنوان مثال، عملیات شمارش می‌تواند به صورت نمادین روی کاغذ انجام شود. سیستم‌های نمادی زبان نوشتاری و نشانه‌ها یکی از قدرتمندترین ابزارها را برای تأثیر در محیط به ما می‌دهند و استفاده از آن‌ها برای حل مشکلات دنیای واقعی، وظیفه اصلی در دوره ابتدایی و متوسطه اول است. انتظار می‌رود دانش‌آموزان متوسطه اول به سطح رابطه‌ای عملکرد در حالت عینی-نمادین برسند.

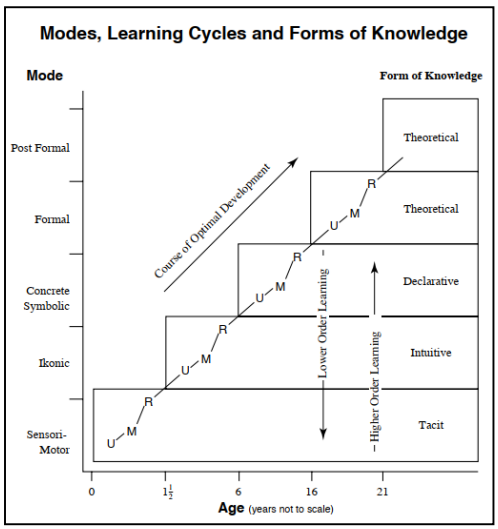
- صوری (شروع آن حدود ۱۵ سالگی): اولین حالت صوری وقتی ظاهر می‌شود که شخص شروع به پرسیدن سوال می‌کند و به جای پذیرفتن ظاهری، فرضیه‌هایی را درباره نحوه آن‌ها شکل می‌دهد. در واقع، در این حالت، فرد دیگر تنها به ارجاعات عینی محدود نیست و به دنبال درک روابط بین مفاهیم است. سطح تفکر تک‌ساختاری در حالت صوری معمولا از حدود ۱۶ سالگی و گاهی اوقات در برخی افراد، زودتر ظاهر می‌شود. با این حال، مطمئناً به همه افراد تعمیم داده نمی‌شود و ممکن است در دیگر افراد اصلاً پیشرفت نکند. بیگز و کولیس (1983, cited by Biggs & Collis, 1989)

اظهار داشته‌اند که درجه لیسانس دانشگاهی به سطح رابطه‌ای تفکر در این حالت احتیاج دارد و در این حالت دانشجو می‌تواند یک درک عملی از یک رشته را به طور کامل داشته باشد.

- فراصوری (شروع آن حدود ۲۱ سالگی): حالت فراصوری معمولاً حداکثر سطح انتزاع مورد نیاز در مقطع کارشناسی است و می‌توان گفت که تفکر فراصوری فراتر از سال‌های تحصیل در مدرسه است. وقتی فرد مرزهای متعارف نظریه و عمل را زیر سوال ببرد و مرزهای جدیدی را ایجاد کند، وارد حالت فراصوری می‌شود. در این حالت شخص قادر است که ساختار بنیادی نظریه‌ها و حوزه‌های علمی را مورد سوال یا چالش قرار دهد که در تحصیلات تکمیلی، نهادینه شده است. می‌توان گفت که تفکر فراصوری ممکن است در نوآوری‌های سطح بالا در بسیاری از زمینه‌ها دیده شود.

علی‌رغم این‌که این پنج حالت تفکر متمایز هستند و به ترتیب ارائه شده در بالا مشخص شده‌اند، برای عملکرد فرد در حالت‌های بعدی (به عنوان مثال: عینی-نمادین)، حالت‌های قبلی (مانند تصویری یا حسی -حرکتی) نیز برای ارائه یک دیدگاه بدیل، در دسترس فرد قرار دارد (Pegg & Tall, 2005). پگ (Pegg, 2011) نشان داد که اکثر دانش‌آموزان در مقطع ابتدایی و متوسطه توانایی عملکرد در حالت نمادین را دارند. با این حال، برخی از دانش‌آموزان ممکن است هنوز در حالت تصویری به محرک‌ها پاسخ دهند، در حالی که بعضی دیگر ممکن است در برخی مباحث با استدلال رسمی پاسخ دهند.

بین حالت‌های تفکر و سطوح پاسخ‌ها در نظریه سولو ارتباط وجود دارد که این ارتباط در شکل ۷ نشان داده شده است. پاسخ در سطح تک‌ساختاری با نماد (U)، پاسخ در سطح چندساختاری با نماد (M) و پاسخ در سطح رابطه‌ای با نماد (R) در شکل ۱ نمایش داده شده است. همان طور که قبلا ذکر شد پاسخ‌های انتزاع تعمیم‌یافته جزو اهداف آموزشی مدرسه نیست که در شکل ۷ نیز به آن اشاره نشده است.

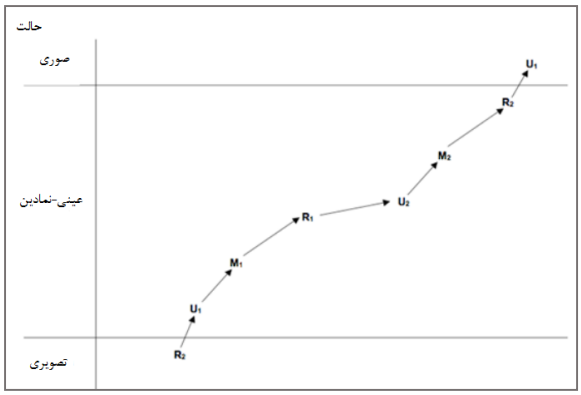


شکل۷: رابطه بین حالت‌ها و سطوح پاسخ سولو مرتبط با برنامه درسی مدرسه‌ای (Biggs & Collis, 1991)

چرخه‌های یادگیری در نظریه سولو

پگ و دیوی (Pegg and Davey, 1998) با توجه به آن‌چه در تحقیقات قبلی انجام شده بود، پاسخ افراد در طیف وسیعی از موقعیت‌های یادگیری را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. نکته قابل توجه این بود که یک چرخه یادگیری منفرد (به

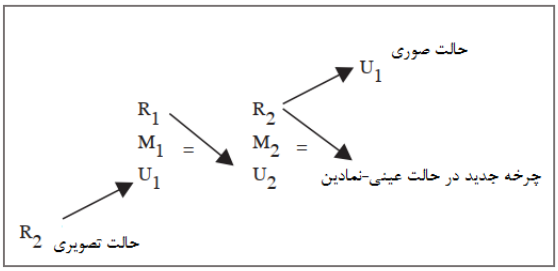
عنوان مثال، U-M-R[1]) برای توضیح کامل توسعه مفاهیم یا تنوع در پاسخ‌های یک حالت (مثلاً عینی-نمادین)، کافی دیده نمی‌شد و بیش از یک چرخه در هر مسئله شناسایی شد. این مشاهده، بازنگری مجدد نظریه را بر چرخه‌های کوچک‌تر تشکیل مفهوم، درون حالت‌های مختلف، متمرکز کرد که از سطح رابطه‌ای از اولین چرخه به سطح تک‌ساختاری در چرخه بعدی متصل می‌شود. با استفاده از این یافته، پاسخ‌های بعد از پاسخ‌های سطح رابطه‌ای در یک حالت، می‌توانند تبدیل به یک سطح تک‌ساختاری جدید شوند که سطح دوم، یک چرخه UMR پیچیده‌تر را نمایش می‌دهد. به عنوان مثال، مطابق شکل ۸، فرد ابتدا در سطح R_2 یعنی سطح رابطه‌ای در حالت تصویری است که به چرخه اول عینی-نمادین و به سطح تک‌ساختاری یعنی U_1 وارد می‌شود. سپس به سطح چندساختاری چرخه اول یعنی M_1 می‌رسد و بعد از رسیدن به سطح رابطه‌ای چرخه اول یعنی R_1 به سطوح تک‌ساختاری، چندساختاری و رابطه‌ای چرخه دوم یعنی U_2، M_2 و R_2 در همان حالت عینی-نمادین رسیده و با گذر از آن‌ها فرد به سطح تک‌ساختاری حالت صوری یعنی U_1 می‌رود (Pegg, 2011؛ Pegg et al, 1998).



شکل۸: نمایش نموداری چرخه‌های یادگیری در نظریه سولو (pegg, 2001, p 12)

از جمله پژوهش‌هایی که با محوریت چرخه‌های یادگیری و ارتباط سطوح پاسخ و حالت تفکر در نظریه سولو انجام شده است، می‌توان به پژوهش پگ و همکاران (Pegg et al, 1998) اشاره کرد که این پژوهش با اجرای آزمون‌هایی روی ۷۴ یادگیرنده از مقاطع ابتدایی (رده سنی ۱۱ سال)، متوسطه اول (رده سنی ۱۶ سال)، متوسطه دوم (رده سنی ۱۸ سال) و دانشگاه (رده سنی ۲۱ سال) انجام شده است. برای درک بهتر موضوعِ چرخه‌های یادگیری در نظریه سولو مثالی از این پژوهش با محوریت چرخه‌های یادگیری در حالت تفکر عینی-نمادین که مربوط به مسئله آزمون دانش‌آموزان ۱۱ ساله و ارزیابی سطح پاسخ آن‌ها بوده است، مطابق شکل ۹ در ادامه بیان گردیده است. مسئله مربوط به توصیف دانش‌آموزان از یک شکل دو بعدی مثلاً مستطیل یا مربع بوده است.

[1] uni-structural, multistructural, relational



شکل۹: نمایش نموداری از سطوح سولو مرتبط با حالت عینی-نمادین (pegg et al, 1998, p 285)

مطابق شکل ۹، ابتدا پاسخی که در آن دانش‌آموز شکل را با تصویر عمومی توصیف کند (مانند تیزی، مسطح بودن، گوشه‌ها، خطوط، اضلاع و رنگ و غیره) به عنوان پاسخ در سطح رابطه‌ای در حالت تصویری کدگذاری می‌شود. پاسخ تک‌ساختاری در چرخه اول حالت عینی-نمادین (U_1)، به تشریح برخی ویژگی‌های مجزا مرتبط با شکل در نظر گرفته می‌شود (مانند شکل چهار ضلع دارد). سطح بعدی پاسخ که تحت عنوان چندساختاری (M_1) کدگذاری می‌شود، دانش‌آموز سعی می‌کند ویژگی ذکر شده در سطح قبل را (مثلاً ویژگی اضلاع) با در نظر گرفتن طول اضلاع توصیف کند. به عنوان مثال، دانش‌آموز ممکن است چندین شکل مشابه را در نظر بگیرد و طول و عرض و ابعاد شکل‌ها را مقایسه و گزارش کند. وقتی پاسخی به بیان یک ویژگی واحد پرداخته شود (مثلاً همه اضلاع مربع، طول یکسانی دارند) در سطح رابطه‌ای چرخه اول (R_1) قرار می‌گیرد. ویژگی‌های پاسخ‌های U_1، M_1 و R_1 مربوط به اولین چرخه در حالت عینی-نمادین بود که ارتباط زیادی با حالت تصویری داشت. در واقع، کدگذاری در چرخه اول براساس توسعه ویژگی اضلاع بود که با شناسایی تعداد اضلاع شروع شد و با اضافه شدن ویژگی طول اضلاع به پایان رسید. چرخه دوم با پاسخی که تنها یک ویژگی را بیان می‌کند شروع می‌شود (به عنوان مثال، یک مربع چهار ضلع مساوی دارد). البته اغلب تشخیص تفاوت دو پاسخ R_1 و U_2 بدون انجام مصاحبه با افراد، دشوار است. جوهره این تفاوت، در کوتاه‌تر بودن و پیچیدگی کمتر و دقیق‌تر بودن پاسخ‌های U_2 نسبت به پاسخ‌های R_1 است. سطح بعدی چرخه دوم یعنی چندساختاری (M_2) شامل مراجعه آنی به چند ویژگی است. در این سطح، ارتباطی بین ویژگی‌ها وجود ندارد. در نهایت ویژگی‌های حاصل از توصیف، در ارتباط با هم در پاسخی در سطح رابطه‌ای چرخه دوم (R_2) ظاهر می‌شوند. تفاوت بین دو چرخه ظاهر شده در حالت عینی-نمادین را می‌توان از مقایسه پاسخ‌های سطح R_1 از چرخه اول و R_2 از چرخه دوم مشخص کرد. هر دو سطح، جنبه‌های مختلفی از چرخه مربوط به خود را با هم ترکیب کرده و نشان می‌دهند. R_1 نشان‌دهنده یک نتیجه نهایی حاصل از ترکیب جنبه‌های مختلفی است که در بهترین حالت، دانش‌آموز قادر به ارائه تنها یک ویژگی است. پاسخ R_2 محصول نهایی ترکیب چند ویژگی است، به طوریکه روابط بین ویژگی‌ها به خوبی شکل گرفته است. پاسخی با کیفیت بالاتر از R_2، مربوط به حالت تک‌ساختاری صوری می‌شود که در این حالت انتظار می‌رود شاهد آغاز استفاده از شرایط لازم و کافی باشیم (Pegg et al, 1998).

آگاهی از حالت‌های تفکر و سطوح پاسخ طبقه‌بندی سولو و بکارگیری آن در فعالیت‌های آموزشی می‌تواند به متخصصان و معلمان برای توصیف نتایج یادگیری و ارزیابی در سطوح مختلف شناختی و برنامه‌ریزی در جهت تحقق اهداف مورد انتظار برنامه درسی و استانداردهای شایستگی، کمک کند (Nunaki et al, 2019). برای مثال، معلمان در برخورد با پاسخ‌هایی که از دانش‌آموزان دریافت می‌کنند، نیاز به تجزیه و تحلیل ایده‌ها و پاسخ‌های ارائه شده توسط دانش‌آموزان جهت بهبود فرآیند یاددهی-یادگیری دارند. طبقه‌بندی سولو یک زبان و الگو مشترک برای معلمان فراهم می‌کند و آن‌ها را قادر می‌سازد مشاهدات خود را از عملکرد دانش‌آموزان به روشی معنی‌دار توصیف کنند. در راستای توسعه دانش و مهارت‌های دانش‌آموزان به جهت این‌که آن‌ها از مرحله تشخیص دادن و فهمیدن گذر کنند و به مرحله

تعمیم دادن و خلق‌کردن برسند، معلمان می‌توانند از ویژگی‌های هر سطح سولو بهره ببرند (Ghunaimat & Alawneh, 2024). به طور کلی معلمان می‌توانند در بسیاری از مباحث ریاضی از جمله هندسه از نظریه سولو استفاده کنند.

تفکر هندسی نقش مهمی در برنامه درسی ریاضیات ایفا می‌کند زیرا این فرصت را به دانش‌آموزان می‌دهد تا با تلفیق دانش ریاضیات و موقعیت‌های زندگی واقعی، بینش عمیق‌تری نسبت به ریاضیات و کاربردهای آن کسب کنند (Hvizdo, 1992, cited by Yurtyapan & Yilmaz, 2021). هندسه همواره یکی از موضوعات چالش‌برانگیز درس ریاضی هم برای دانش‌آموزان و هم معلمان بوده است. بسیاری از مشکلات یادگیری و آموزشی موجود در کلاس‌های درس از آن جا ناشی می‌شود که معلمان اغلب با توجه به ترجیحات خود و بدون توجه به تفاوت‌های فردی یادگیرندگان، تنها برای دسته‌ای خاص از دانش‌آموزان، آموزش می‌دهند و جمع زیادی را با سطوح تفکر مختلف نادیده می‌گیرند (Bazgir et al, 2021). بنابراین باید این مسئله را مدنظر قرار داد تا زمانی که میان سطح تفکر یادگیرنده و سطح آموزش دریافتی، همگونی وجود نداشته باشد، آموزش در مسیر درست پیش نخواهد رفت و هنگامی‌که معلم در سطوح مختلف تفکر هندسی، بدون در نظر گرفتن سطح تفکر دانش‌آموز آموزش بدهد، مفاهیم به طور کامل توسط او درک نمی‌شود (van Hiele, 1959). بنابراین لازم است معلمان به سطح تفکر هندسی دانش‌آموزان در طرح درس‌های خود و استفاده از روش‌های تدریس توجه نمایند (Sabzali & Tavanaie, 2021).

با بررسی ادبیات پژوهش به مطالعاتی در مورد ارزیابی سطح تفکر هندسی برخورد می‌کنیم که در اکثر این مطالعات برای بررسی سطح تفکر هندسی از نظریه فن‌هیلی استفاده شده است (Yurtyapan & Yilmaz, 2021). رویکرد نظریه فن‌هیلی در برابر مشکلات یادگیری مفهومی هندسه قابل تأمل است و آگاهی دست اندرکاران و معلمان ریاضی از این نظریه می‌تواند به آن‌ها در درک شیوه تفکر دانش‌آموزان کمک کند (Safabakhsh & Yaftian, 2018). البته برای تفسیر واضح‌تر درک‌های فردی یادگیرنده در هندسه، به نظر می‌رسد نیاز به سیستمی فراتر از سیستم گسترده پنج سطحی است که توسط فن‌هیلی پیشنهاد شده است. این امر می‌تواند با به کارگیری مدلی مانند نظریه سولو، امکان طبقه‌بندی سطوح تفکر هندسی را از جهات مختلف به وجود آورد (Pegg et al, 1998).

مقایسه نظریه سولو و فن‌هیلی

تحقیقات متعددی که در طول سالیان گذشته در کشورهای مختلف انجام گرفته، بیانگر آن است که مسیر یادگیری هندسه برای اغلب دانش‌آموزان هموار نیست (Yaftian & Pazoki, 2021) و آن‌ها بخصوص در استدلال‌های هندسی و اثبات با چالش‌هایی مواجه هستند. نظریه فن‌هیلی شامل سطوح تفکری است که دانش‌آموزان در ضمن یادگیری هندسه از آن عبور می‌کنند. همچنین، این نظریه توضیح می‌دهد چرا دانش‌آموزان در یادگیری هندسه با مشکل مواجه می‌شوند (Yaftian & Safabakhsh, 2019). نظریه فن‌هیلی یک نظریه یادگیری است که انواع مختلف تفکر را که دانش‌آموزان هنگام روبرو شدن با شکل‌های هندسی تجربه می‌کنند، عرضه می‌کند و از مرحله برخورد بصری با شکل‌های هندسی تا درک صوری اثبات هندسی را شامل می‌شود. فن‌هیلی در پنج سطح از تفکر، نظریه خود را ارائه کرده است (van Hiele, 1986). جدول ۳، سطوح تفکر فن‌هیلی را به طور خلاصه و به همراه توانایی‌های مورد انتظار در هر سطح، نمایش می‌دهد.

جدول ۳: سطوح فن‌هیلی (Howse & Howse, 2014)

سطح	نام سطح	توانایی دانش‌آموز
۱	تجسم	اشکال را براساس ظاهرشان توصیف می‌کند.
۲	تجزیه و تحلیل	اشکال را براساس ویژگی‌هایشان توصیف می‌کند.
۳	استنتاج غیررسمی	اهمیت ویژگی‌ها را درک کرده و به روابط میان آن‌ها پی می‌برد. از این رو، می‌تواند ویژگی‌های اشکال را به طور منطقی مرتب کند.
۴	استنتاج	توانایی استدلال منطقی دارد و قضیه‌ها را به صورت استنتاجی اثبات می‌کند.
۵	دقت	قضایا را در سیستم‌های اصل موضوعی متفاوت پایه‌گذاری و تحلیل می‌کند.

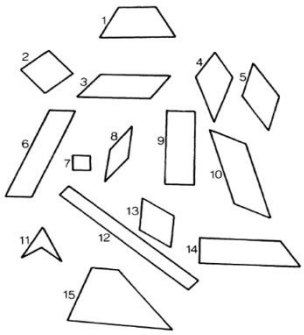
فرضی که اساس نظریه فن‌هیلی است، وجود سطوح سلسله مراتبی است. یعنی لازمه رسیدن به یک سطح آن است که شخص، سطوح قبلی را گذرانده باشد (van Hiele, 1986). البته طی کردن هر یک از سطوح سولو و رسیدن به آخرین سطح یعنی انتزاع تعمیم‌یافته نیز مستلزم طی کردن و تسلط بر تک تک سطوح قبلی است (Hidayatullah, 2019). می‌توان گفت که یک طرح مشابه نظریه فن‌هیلی، برای مطالعه عملکرد در مورد تفکر هندسی، سولو یعنی طبقه‌بندی نتایج یادگیری با بررسی ساختار آن‌ها است (Pegg et al, 1998)، زیرا طبقه‌بندی سولو به دلیل ماهیت انعطاف‌پذیر آن، امکان تجزیه و تحلیل عمیق پاسخ‌های دانش‌آموزان را می‌دهد. نکته حائز اهمیت این است که برخلاف نظریه تفکر هندسی فن‌هیلی که اغلب در مطالعات هندسی ترجیح داده شده است، سولو در ابتدا به دنبال توصیف و طبقه‌بندی ساختار پاسخ‌های دانش‌آموزان به جای طبقه‌بندی خود دانش‌آموزان و سپس شناسایی و بررسی سطح تفکر آن‌ها است. بنابراین، ویژگی که این طبقه‌بندی را متفاوت می‌کند این است که فرآیندهای تفکر فرد برای رسیدن به پاسخ مسئله را نیز بررسی می‌کند (Biggs & Collis, 1991؛ Pegg & Tall, 2011, cited by Yurtyapan & Yilmaz, 2021). در جدول ۴ مطابقت و مقایسه بین سطوح فن‌هیلی و سولو ارائه شده است.

جدول۴: مقایسه بین سطوح فن‌هیلی و سولو (Jurdak, 1991)

سطوح سولو	سطوح فن‌هیلی
پیش‌ساختاری: پاسخ، نشان‌دهنده هیچ جنبه مرتبطی نیست.	–
تک‌ساختاری: پاسخ، نشان‌دهنده استفاده از یک جنبه مرتبط است.	**سطح ۱ (تجسم):** درک اشکال براساس ظاهرشان.
چندساختاری: پاسخ، نشان‌دهنده استفاده از چندین جنبه جداگانه و مستقل است.	**سطح ۲ (تجزیه و تحلیل):** درک خصوصیات اشکال هندسی (اما در این سطح، این خصوصیات جدا و غیرمرتبط هستند).
رابطه‌ای: پاسخ، نشان‌دهنده استفاده از تمام جنبه‌های مرتبط به یک کل یکپارچه است.	**سطح ۳ (استنتاج غیررسمی):** درک روابط بین خصوصیات اشکال برای شکل‌گیری تعاریف انتزاعی.
انتزاع تعمیم‌یافته: استفاده جامع از همه جنبه‌های مرتبط همراه با فرضیه‌سازی و اصول انتزاعی.	**سطح ۴ (استنتاج):** توانایی استدلال و اثبات ریاضی با استفاده از استنتاج، بدیهیات و تعاریف.
–	**سطح ۵ (دقت):** در این سطح، قضیه‌ها در سیستم‌های اصل موضوعیِ گوناگون مطرح و تحلیل می‌شوند.

برای نشان دادن مطابقت بین سطوح سولو و فن‌هیلی، جوردک (Jurdak, 1991) در پژوهش خود در بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان به یک تکلیف (شکل ۱۰)، به مقایسه سطوح پاسخ در نظریه سولو و فن‌هیلی پرداخته است. این تکلیف از مطالعه برگر و شاونسی (Burger and Shaughnessy, 1986) گرفته شده بود که هدف تکلیف، شناسایی و تعریف چهار-ضلعی‌ها بوده است که در واقع، دانش‌آموزان باید نام هر شکل را به همراه فهرستی برای توصیف آن (شرایط لازم و کافی) تعیین می‌کردند. هدف مطالعه برگر و شاونسی توصیف سطح فن‌هیلی به صورت عملیاتی با در نظر گرفتن عملکرد دانش‌آموزان بود.

تکلیف: با توجه به شکل زیر، بر روی مربع‌ها حرف S، بر روی مستطیل‌ها حرف R، (و در صورتی که متوازی‌الاضلاع و لوزی را می‌شناسید)، بر روی متوازی‌الاضلاع‌ها حرف P و بر روی لوزی‌ها حرف B را بنویسید. برای پاسخ خود دلیل بیاورید. اگر بخواهید یک شخص را راهنمایی کنید تا در یک مجموعه از اشکال، مستطیل‌ها را پیدا کند، چه نکته‌ای را به او یادآوری می‌کنید تا این کار را به درستی انجام دهد. آیا شکل ۹ یک متوازی‌الاضلاع است؟



شکل۱۰: مسئله جهت ارزیابی شناخت دانش‌آموزان از انواع چهارضلعی‌ها (Burger & Shaughnessy, 1986, p. 35)

جوردک پاسخ‌های دانش‌آموزان به مسئله فوق را تجزیه و تحلیل کرد و هر پاسخ را به یک سطح فن‌هیلی اختصاص داد. در چارچوب طبقه‌بندی سولو نیز، داده‌های مربوط به این تکلیف شامل شناسایی چهارضلعی‌ها و خصوصیات آن‌ها، توسط جوردک سطح‌بندی شد. جدول ۵ طبقه‌بندی مقایسه‌ای «شناسایی و تعریف اشکال» در نظریه‌های سولو و فن‌هیلی را در پژوهش جوردک نشان می‌دهد که تجزیه و تحلیل نتایج آن امکان تطبیق سطوح فن‌هیلی و سولو را تا حدی فراهم می‌کند.

جدول ۵: طبقه‌بندی تطبیقی در طبقه‌بندی‌های سولو و فن‌هیلی (Jurdak, 1991)

توصیف نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان	طبقه‌بندی سولو	طبقه‌بندی فن‌هیلی
برخی از چهارضلعی‌ها را شناسایی کرده است، اما به دلیل در نظر گرفتن داده‌های نادرست موفق به شناسایی سایر موارد از همان نوع نشده است.	**تک‌ساختاری:** از یک جنبه مربوطه استفاده شده است (مثل فقط توجه به ظاهر شکل).	**سطح ۱:** تجسم
انواع چهارضلعی مشخص شده اما طبقه‌بندی برای آن‌ها در نظر نگرفته شده است.	**چندساختاری:** از چندین جنبه جداگانه مرتبط استفاده شده است (چهارضلعی و استفاده از خصوصیات جداگانه آن‌ها).	**سطح ۲:** تجزیه و تحلیل
چهارضلعی‌ها را به درستی شناسایی کرده و آن‌ها را با اجزای خود تعریف کرده است.	**رابطه‌ای:** از کلیه اطلاعات مربوطه و روابط موجود در آن‌ها استفاده شده است (چهار ضلعی، خصوصیات اجزای آن، شرایط کافی برای تعریف شکل).	**سطح ۳:** استنتاج‌غیر-رسمی
چهارضلعی‌های مختلف را به طور مستقل از یکدیگر تعریف کرده و تعاریف را بررسی کرده است تا مطمئن شود که طبقه‌بندی مورد نظر درست است.	**انتزاع تعمیم‌یافته:** استفاده جامع از اطلاعات داده شده (شکل، خصوصیات، روابط) با ساختارهای فرضی مرتبط و اصول انتزاعی (آزمایش شده بر روی داده‌ها).	**سطح ۴:** استنتاج

مطابق جدول ۴ و ۵ از نظر منطقی و تجربی امکان همسان‌سازی سطوح فن‌هیلی و سطوح پاسخ سولو وجود دارد (Jurdak, 1991). از طرفی امکان تطابق سطوح فن‌هیلی با حالت‌های تفکر سولو نیز قابل بررسی است که در جدول ۶ ارائه شده است. پس می‌توان گفت امکان تطبیق بین نظریه سولو که یک مدل دو بعدی است و می‌تواند حالت‌های تفکر و سطوح پاسخ را مورد بررسی قرار دهد (چرخه‌های یادگیری) و نظریه فن‌هیلی که یک مدل تک بعدی است، وجود دارد.

جدول ۶: مقایسه حالت‌های تفکر سولو و سطوح فن‌هیلی (Pegg et al, 1998, p 287)

سطوح فن‌هیلی	حالت‌ها سولو
سطح اول (تجسم)	تصویری
سطح دوم و سوم (تجزیه و تحلیل- استنتاج غیررسمی)	عینی-نمادین
سطح چهارم (استنتاج)	صوری
سطح پنجم (دقت)	فراصوری

براساس جدول‌های ۴ و۶ و شکل‌های ۷، ۸ و۹، سطح ۱ نظریه فن‌هیلی که در آن یادگیرنده شکل‌ها را براساس ظاهر کلی آن‌ها تشخیص می‌دهد، می‌تواند در سطوح چرخه دوم (U_2، M_2 و R_2) در حالت تصویری، تفسیر شود. سطح ۲ در نظریه فن‌هیلی که در آن یادگیرنده اشکال را با ویژگی‌هایشان تشخیص می‌دهد، می‌تواند در سطوح U_2 یا M_2 در حالت عینی-نمادین قرار گیرد. سطح ۳ نظریه فن‌هیلی که در آن یادگیرنده روابط بین ویژگی‌ها را درک کرده و می‌تواند اثبات غیررسمی انجام دهد، در سطح R_2 سولو در حالت عینی-نمادین قرار می‌گیرد. سطح ۴ فن‌هیلی نیز که در آن یادگیرندگان می‌توانند از روابط به عنوان ابزاری در فرآیند حل استفاده کنند، می‌تواند در دو چرخه U_1، M_1، R_1 و U_2، M_2، R_2 در حالت تفکر صوری کدگذاری شود. چرخه اول در این حالت، نشان‌دهنده توسعه فرآیند قیاسی است، در واقع یادگیرنده با رسیدن به پاسخ R_1 می‌تواند روابطی مانند همسانی و شباهت را به کار گیرد. پاسخ R_2 نیز دربرگیرنده کاربرد شرایط لازم و کافی است که بهترین پاسخی است که از دانش‌آموز در سال‌های آخر دبیرستان انتظار می‌رود (pegg et al, 1998؛ Jurdak, 1991). سطح ۵ نظریه فن‌هیلی نیز می‌تواند توسط ریاضیدانان حرفه‌ای و یا یادگیرندگان تیزهوش بدست آید که با چرخه‌های بالاتر سطوح سولو در حالت تفکر فراصوری تطابق دارد (pegg et al, 1998؛ Jurdak, 1991؛ González et al, 2022).

از جمله کاربردهای مطابقت نظریه سولو و فن‌هیلی این است که می‌توان از آن‌ها در جهت تعیین و بررسی سطوح تفکر هندسی دانش‌آموزان استفاده کرد و سپس با مشخص نمودن سطح مسائل در کتاب‌های درسی ریاضی به مطابقت و مقایسه سطح مسائل کتاب‌های درسی با سطح تفکر دانش‌آموزان پرداخت. به عنوان مثال، یافتیان و محبت‌پناه (Yaftian and Mohabatpanah, 2024) در پژوهشی که به ارزیابی مسائل کتاب ریاضی پایه هشتم براساس سطوح طبقه‌بندی سولو پرداخته‌اند، نشان دادند که سطح مسائلِ فصل‌های مرتبط با هندسه کتاب ریاضی پایه هشتم در سطح-های بالاتر طبقه‌بندی سولو (چندساختاری و رابطه‌ای و انتزاع تعمیم‌یافته) است. از طرفی پژوهش هندایانی و همکاران (Handayani et al, 2023) که با هدف تعیین سطح تفکر دانش‌آموزان پایه هشتم در حل مسائل ریاضی براساس طبقه‌بندی سولو انجام شده است، نشان‌دهنده این موضوع بوده است که دانش‌آموزان پایه هشتم به سطح تفکر رابطه‌ای و انتزاع تعمیم‌یافته نمی‌رسند. همچنین درخصوص سطح تفکر هندسی دانش‌آموزان پایه هشتم براساس نظریه فن‌هیلی، نتایج پژوهش کاراپینار و ایلهان (Karapınar and İlhan, 2018) و صفابخش (Safabakhsh, 2015) بیانگر آن بوده است که اغلب دانش‌آموزان پایه هشتم در سطح اول فن‌هیلی یعنی تجسم (معادل تک‌ساختاری سولو) و فقط درصد اندکی در سطح دوم یعنی تجزیه و تحلیل (معادل چندساختاری سولو) قرار دارند. بنابراین شایسته است برنامه‌ریزان درسی و پژوهشگران به تجزیه و تحلیل و مقایسه و سپس مطابقت بین سطوح مسائل کتاب‌های درسی (به خصوص مسائل مرتبط با مفاهیم چالش‌برانگیز هندسه) و سطح تفکر دانش‌آموزان بپردازند.

نتیجه‌گیری

یکی از راهکارهایی که آموزش ارائه شده توسط آموزشگران را برای یادگیرنده قابل درک و استفاده می‌نماید تعیین سطح تفکر و یادگیری یادگیرندگان و ارائه آموزش متناسب با این سطح و تلاش برای ارتقا سطح تفکر آن‌ها است. طبقه‌بندی سولو یکی از چارچوب‌های مناسب برای توسعه ابزارهای ارزیابی منظم و عینی است که توسط متخصصان و معلمان قابل استفاده است (Hidayatullah, 2019). داموپولی و همکاران (Damopolii et al, 2020) معتقدند که سولو می‌تواند به عنوان یک چارچوب منسجم برای هدایت فرآیند یاددهی و یادگیری در تدوین برنامه درسی و به طور خاص برای سنجش توانایی تفکر و ارزیابی فراگیران استفاده شود.

نقطه قوت سولو در این است که چارچوبی ارائه می‌دهد تا امکان ارائه تفسیرهایی از ساختار و کیفیت پاسخ‌های افراد در محیط‌های گوناگون یادگیری، مانند مدرسه و دانشگاه و در حوزه‌های متعدد موضوعی فراهم شود. طبقه‌بندی سولو در حوزه‌های متعددی از جمله ریاضیات به کار گرفته شده است (Biggs & Collis,1989) و می‌تواند هنگام تجزیه و تحلیل برنامه‌های درسی علوم پایه به طور موثری استفاده شود (Brabrand & Dahl, 2009). به گفته کولیس و همکاران (Collis et al, 1986)، طبقه‌بندی سولو یک مبنای نظری برای توسعه روشی است که می‌تواند برای ارزیابی استدلال در فعالیت‌های حل مسئله ریاضی استفاده شود (Mukuka et al, 2020). تجزیه و تحلیل مسائل ریاضی با استفاده از این طبقه‌بندی، می‌تواند به عنوان ابزاری قدرتمند برای ارزیابی حل مسئله استفاده گردد و بینشی در مورد علت عدم درک دانش مفهومی، ارائه دهد (Biber & İncikabi, 2016). همچنین به کمک انواع سطوح پاسخ در طبقه‌بندی سولو و شاخص‌های ارزیابی هوش منطقی-ریاضی (یکی از هوش‌های چندگانه گاردنر[1]) می‌توان از این طبقه‌بندی برای تجزیه و تحلیل هوش منطقی-ریاضی یادگیرندگان در حل مسائل ریاضی استفاده کرد (Bariyah & Retnowati, 2024).

در حالی که سطوح فن‌هیلی مدت‌هاست که برای بررسی درک دانش‌آموزان در هندسه استفاده می‌شود اما طبقه‌بندی سولو کمتر در زمینه هندسه به کار گرفته شده است. از طرفی، سودمندی طبقه‌بندی سولو در ارزیابی سطوح استدلال در حل انواع مسائل ریاضی (نه فقط هندسه) مشخص شده است. ابتدا، باید تشخیص داد که آیا این دو چارچوب در زمینه و هدف متفاوت هستند و یا خیر. سطوح فن‌هیلی سطح درک دانش‌آموز را در نظر می‌گیرد و در جهت ردیابی مشکلات دانش‌آموزان در درس هندسه به ارائه سطوح تفکر هندسی آن‌ها می‌پردازد و راهکارهایی در این خصوص مطرح می‌نماید و طبقه‌بندی سولو اقداماتی را که دانش‌آموز هنگام تعامل با اطلاعات پیچیده‌تر انجام می‌دهد، در نظر می‌گیرد. به عبارت دیگر، نظریه سولو می‌تواند یک طرح کمکی و یا حتی در برخی از موارد جایگزینی برای مطالعه عملکرد در تکالیف هندسی، براساس طبقه‌بندی نتایج یادگیری با بررسی ساختار پاسخ‌های افراد به جای طبقه‌بندی آن‌ها با مطالعه شاخص-های توانایی‌های شناختی خاص باشد. پیشنهاد نمی‌شود که سطوح فن‌هیلی نادیده گرفته شود، بلکه باید به عنوان توانایی‌های شناختی تلقی شود که منعکس کننده حالت‌های عمومی عملکرد غالب در مراحل مختلف رشد در تفکر هندسی است. در طبقه‌بندی سولو، نتیجه آموخته شده به طور فزاینده‌ای پیچیده می‌شود. به بیان دیگر، سطوح فن‌هیلی که به طور خاص برای توصیف تفکر هندسی توسعه یافته‌اند، توالی از توانایی‌های شناختی را در نظر می‌گیرند که مجموعه‌ای از مراحل رشد را مشخص می‌کند. بنابراین، از برخی جهات، این چارچوب‌ها بیشتر مکمل هم هستند تا این‌که در توافق یا مخالف یکدیگر باشند (Jurdak, 1991 ؛Bossé et al, 2022).

مشارکت نویسندگان

همه نویسندگان در طراحی و نگارش به طور یکسان مشارکت داشته‌اند.

[1] gardner

تشکر و قدردانی

این مطالعه با حمایت مالی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی طبق ابلاغ گرنت شماره ۵۰۴۳ مورخ ۱۴۰۲/۳/۶ انجام گردیده است، بدین وسیله از این دانشگاه تشکر و قدردانی می‌گردد.

تعارض منافع

«هیچ گونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است»

COPYRIGHTS
©2021 The author(s). This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, as long as the original authors and source are cited. No permission is required from the authors or the publishers.

References

Agustin, S. A., Sugiatno, S., & Suratman, D. (2019). Pemahaman konseptual siswa dikaji dari taksonomi solo dalam materi fungsi eksponensial di sma. *Jurnal Pendidikan dan Pembelajaran Khatulistiwa, 8(6),1-9.*

Aslan, S. A. (2023). Investigation of the learning outcomes in the Turkish course curriculum (from 5th grade to 8th grade) in terms of the solo taxonomy. *Trakya Eğitim Dergisi*, *13*(1), 682-694.

Bariyah, K., & Retnowati, E. (2024, April). How to analyze students' logical-mathematical intelligence in problem solving based on SOLO taxonomy. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2622, No. 1). AIP Publishing.

Bazgir, T., & Abdolhoseini, F., & Shabak, M. (2021). Impact of manipulation activities on learning the geometry skills (Environment and Area) of boy students. *Research in Mathematics Education*, *2*(3), 51-66. [In Persian]

Biggs, J. & Collis, K. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy*. New York: Academic Press.

Biggs, J., & Collis, K. (1989). Towards a model of school-based curriculum development and assessment using the SOLO taxonomy. *Australian journal of education*, *33*(2), 151-163.

Biggs, J., B. Collis, K. (1991). Multimodal learning and the quality of intellectual behaviors. In H. A. H. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and measurement* (pp. 57-76). Erlbaum, Hillsdale, NJ.

Bossé, M. J., Bayaga, A., Lynch-Davis, K., & DeMarte, A. (2021). Assessing analytic geometry understanding: van Hiele, SOLO, and beyond. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *22*(1), 1-23.

Brabrand, C., & Dahl, B. (2009). Constructive alignment and the SOLO taxonomy: A comparative study of university competences in computer science vs. mathematics. In *Conferences in Research and Practice in Information Technology* (Vol. 88, pp. 3-17).

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for research in mathematics education*, 17(1), 31-48.

Caniglia, J. C., & Meadows, M. (2018). An application of the Solo taxonomy to classify strategies used by pre-service teachers to solve "one question problems". *Australian Journal of Teacher Education*, *43*(9), 75-89.

Çetin, B., & İlhan, M. (2017). An analysis of rater severity and leniency in open-ended mathematic questions rated through standard rubrics and rubrics based on the SOLO taxonomy. *Education and Science*, *42*(189), 217−247.

Damopolii, I., Nunaki, J. H., Nusantari, E., & Kandowangko, N. Y. (2020, June). The effectiveness of Inquiry-based learning to train students' thinking skill based on SOLO taxonomy. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1567, No. 4, p. 042025). IOP Publishing.

Elazzabi, A., & Kaçar, A. (2020). Investigation of Libyan and Turkish students' thinking levels in solving quadratic word problems based on SOLO Taxonomy. *Pegem Eğitim ve Öğretim Dergisi*, *10*(1), 283-316.

Ghunaimat, M. A., & Alawneh, E. A. (2024). The effectiveness of using the SOLO taxonomy in acquiring students the concepts of coordinate Geometry. *IJORER: International Journal of Recent Educational Research*, *5*(3), 523-536.

González, A., Manero, V., Arnal-Bailera, A., & Puertas, M. L. (2022). Proof levels of graph theory students under the lens of the van Hiele model. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-19.

Haghjoo, S., & Reyhani, E. (2020). An analysis of APOS and SOLO mathematical learning theories. *5th National Conference on Modern Approaches to Education and Research*, Mazandaran, Mahmudabad. [In Persian]

Handayani, F., Lestari, A., & Thalhah, S. Z. (2023, April). Analysis of students' thinking level based on SOLO taxonomy in terms of learning style. In *Proceeding International Conference on Religion, Science and Education* (Vol. 2, pp. 249-253).

Hidayatullah, A. (2019). Comparison of processes construct concept of solo theory and apos theory in mathematics learning. *Humanities & Social Sciences Reviews*, *7*(3), 432-237.

Howse, T. D., & Howse, M. E. (2015). Linking the van Hiele theory to instruction. *Teaching Children Mathematics*, *21*(5), 304-313

İNCİKABI, L., & BİBER, A. Ç. (2016). Problems posed by prospective elementary mathematics teachers in the concept of functions: An analysis based on solo taxonomy. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *12*(3), 796-809.

Jurdak, M. (1991). van Hiele levels and the SOLO taxonomy. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *22*(1), 57-60.

Karapınar, F., & Alp İlhan, O. (2018). An investigation of 8th grade students' knowledge on geometrical objects in terms of van heile levels of understanding geometry. *American Journal of Educational Research*, *6*(2), 96-103.

Mukuka, A., Balimuttajjo, S., & Mutarutinya, V. (2020). Applying the SOLO taxonomy in assessing and fostering students' mathematical problem-solving abilities. In *Proceedings of the 28th Annual Conference of the Southern African Association for Research in Mathematics, Science and Technology Education* (pp. 104-112).

Nunaki, J. H., Damopolii, I., Nusantari, E., & Kandowangko, N. Y. (2019). The contribution of metacognitive in the inquiry-based learning to students' thinking skill based on SOLO Taxonomy. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1321, No. 3, p. 032044). IOP Publishing.

Özdemir, A. S., & Göktepe Yildiz, S. (2015). The analysis of elementary mathematics preservice teachers' spatial orientation skills with SOLO model. *Eurasian Journal of Educational Research, 61*, 217-236.

Panizzon, D., Callingham, R., Wright, T., & Pegg, J. (2007). Shifting sands: Using SOLO to promote assessment for learning with secondary mathematics and science teachers. *Refereed paper presented at the Australasian Association for Research in Education (AARE) conference in Fremantle, Western Australia, 25–29th November 2007*.

Pegg, J. (2011). Enhancing rural teachers' instructional decision making: An application of the SOLO model. *The Journal of Educational Administration*, *29*(2), 1-8.

Pegg, J., Gutiérrez, A., & Huerta, P. (1998). Assessing reasoning abilities in geometry. *New ICMI Studies Series*, *5*, 275-295.

Pegg, J., & Tall, D. (2005). The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. *ZDM*, *37*(6), 468-475.

Reading, C., & Lawrie, L. (2004). Using SOLO to analyse group responses. In M. J. Hoines & A. B.Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of MathematicsEducation* (Vol. 3, pp. 193–200). Bergen, Norway: begen University College.

Reyhani, E. (2021). Analyzing the quality of reasoning of mathematics undergraduate prespective teachers in determining the value of a mathematical statement. *The 51st Iranian Mathematic Conference*, Kashan. [In Persian]

Sabzali, N., & Tavanaie, N. (2021). Investigating the effect of teaching geometry based on van Hiele theory on the learning of students. *Research in Mathematics Education*, *1*(2), 1-11. [In Persian]

Safabakhsh, A., & Yaftian, N. (2018). Van Hiele theory about levels of thinking and geometric reasoning. *Journal of Mathematics Education Development 129*, 35(3), 15-21. [In Persian]

Safabakhsh, A. (2015). The study of 8th gradestudents'level of understanding and reasoning according to the Van Hiele model, *Dessertation Submitted to the Master's Degree of Mathematics Education*, Shahid Rajaee Teacher Training University of Tehran. [In Persian]

Saputra, D. C., Nurjanah, A., & Retnawati, H. (2019). Students' ability of mathematical problem-solving based on SOLO taxonomy. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1320, No. 1, p. 012070). IOP Publishing.

van Hiele, P. M. (1959). The child's thought and geometry. In D. Fuys, D. Geddes, & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele* (pp. 243–252). Brooklyn, NY: Brooklyn College, School of Education.

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Academic Pres. Inc: Orlando, Florida.

Yaftian, N., & Mohabatpanah, A. (2024). The traces of the SOLO Theory taxonomy levels of in the 8th grade mathematics textbook. *Educational and Scholastic Studies*, *13*(1), 113-128.

Yaftian, N., & Safabakhsh, A. (2019). Teaching and learning geometry: Introducing van Hiele theory. *Mathematics and Society*, *4*(3), 9-22. [In Persian]

Yaftian, N., & pazoki, L. (2021). Students' challenges with the figural concepts in geometry. *The Journal of Theory and Practice in Teachers Education*, *7*(11), 47-65. [In Persian]

Yurtyapan, M. I., & Yilmaz, G. K. (2021). An investigation of the geometric thinking levels of middle school mathematics preservice teachers according to SOLO Taxonomy:" Social distance problems". *Participatory Educational Research*, *8*(3), 188-209.