**Research in Mathematics Education** **http://rme.cfu.ac.ir**
***Vol. 2, No. 4, Winter 2022***
***pp.61-87***

# Investigating the 10th Grade Students' Mathematical Misconceptions in the Topic of Set Theory

**Mehdi Parsinia*[1], Seyed Mehdi Hashemi[2], Fatemeh Keramat[2], Anis Khoda Rahmpour[2]**

[1]Educational Research Institute, Department of Education of Khuzestan Province, Ahvaz, Iran
[2]Mathematics Teacher of the Department of Education of Khuzestan Province, Abadan, Iran

**Abstract:** In this research, we identify and resolve students' mathematical misconceptions on sets related to the first chapter of 10th-grade mathematics. The statistical population of this research was selected from the 10th-grade female students of Dezful city (located in Khuzestan province) in the academic years of 2018-2019 and 2019-2020. The questionnaire for this research consists of 19 questions whose validity and reliability have been measured through the Cronbach's alpha test. The current research includes two stages of identifying misconceptions and solving them. First, a questionnaire was given to 286 statistical community students, and students' misunderstandings were extracted using its results. Among the most critical cases of misunderstandings, we can mention operations on intervals and concepts of algebras. Then, one hundred female students of the 10th-grade experimental field of the city were divided into two homogenous and equal groups, control and experimental. In the experimental group, the topic of collections was presented by pointing out misconceptions and based on the theory of diversity (Martin, 2015; Booth, 1997). In the control group, training was done without pointing out misunderstandings. After that, both groups were tested with a researcher-made test with a Cronbach's alpha reliability coefficient of 0.714, and the misunderstanding scores of the two groups were compared with each other through the t-test. In the end, considering that the independent t-test was less than 0.05, the effectiveness of the diversity method has been concluded. The results of this research can be used in the revision of textbooks and teachers' teaching.

**Keywords:** Misconception, Conceptual Imagination, Diversity Theory, 10th-grade Mathematics

* Corresponding Author, Email: parsiniamehdi@gmail.com

http://rme.cfu.ac.ir
پژوهش در آموزش ریاضی
دوره ۲، شماره ۴، زمستان ۱۴۰۰
صفحات ۸۷-۶۱

# بررسی بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزان پایه دهم در مبحث مجموعه‌ها

**مهدی پارسی‌نیا[1*]، سید مهدی هاشمی[2]، فاطمه کرامت[2]، انیس خدارحم‌پور[2]**

**[1]موسسه تحقیقات آموزشی، اداره کل آموزش و پرورش استان خوزستان، خوزستان، اهواز، ایران**
**[2]دبیر ریاضی اداره کل آموزش و پرورش استان خوزستان، شهرستان ابادان، ایران**

**چکیده: در این پژوهش به شناسایی و رفع بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزان در مباحث مربوط به فصل اول ریاضی پایه دهم، مبحث مجموعه‌ها می‌پردازیم. جامعه آماری این پژوهش از بین دانش‌آموزان دختر پایه دهم شهرستان دزفول (واقع در استان خوزستان) در سال‌های تحصیلی ۹۷-۹۸ و ۹۸-۹۹ انتخاب شده است. پرسشنامه‌ای که برای این پژوهش در نظر گرفته شده است مشتمل بر ۱۹ سوال است که روایی و پایایی آن از طریق آزمون آلفاکرونباخ سنجیده شده است. پژوهش حاضر شامل دو مرحله شناسایی بدفهمی‌ها و رفع آن‌ها است. ابتدا پرسشنامه به ۲۸٦ نفر از دانش‌آموزان جامعه آماری داده و با استفاده از نتایج آن، بدفهمی‌های دانش‌آموزان استخراج شد.از مهمترین موارد بدفهمی، می توان به اعمال روی بازه ها و مفاهیم جبرمجموعه ها اشاره کرد. سپس صد نفر از دانش‌آموزان دختر رشته تجربی پایه دهم شهرستان به دو گروه همگن و هم‌اندازه کنترل و آزمایش تقسیم شدند. در گروه آزمایش، مبحث مجموعه‌ها با گوشزد کردن بدفهمی‌ها و بر اساس نظریه تنوع (مارتن، ۲۰۱۵؛ بوث، ۱۹۹۷) ارائه گردید و نیز در گروه کنترل، آموزش بدون گوشزد کردن بدفهمی‌ها انجام شد. پس از آن هر دو گروه با آزمون محقق‌ساخته با ضریب پایایی آلفاکرونباخ ۰/۷۱٤ مورد امتحان قرار گرفته و نمره بدفهمی دو گروه از طریق آزمون تی با یکدیگر مقایسه شد. در پایان با توجه به اینکه نتیجه آزمون تی مستقل کمتر از ۰/۰۵ شد، تاثیرگذاری روش تنوع نتیجه گرفته شده است.از نتایج این پژوهش می‌توان در بازنگری کتاب درسی و تدریس دبیران بهره برد.**

**واژگان کلیدی: بدفهمی،تصور مفهومی، نظریه تنوع، ریاضی پایه دهم**

* نویسنده مسئول، رایانامه: parsiniamehdi@gmail.com

**مقدمه**

**دانش‌آموزان در مباحث مختلف ریاضیات دارای بدفهمی هستند که به‌طور قابل توجه ای یادگیری آن ها را تحت تاثیر قرار داده است. عالمیان، سیدی و حبیبی (۲۰۰۸) گزارش کرده اند، دانش‌آموزان پایه هشتم بدفهمی های زیادی در مهارت های ذهنی دارند و دانش متناسب با موضوعات هندسی را ندارند. بیشترین بدفهمی ها به ترتیب در مهارت‌های کاربردی، منطقی وترسیمی مشاهده می شوند.**

**از دلایل مهم این بدفهمی ها می توان به ضعف اطلاعاتی یا پایه ای دانش آموزان، روش‌های سنتی تدریس، تغییر همه ساله کتاب های درسی، کتاب های کمک آموزشی و ضعف تدریس بعضی از دبیران ریاضی اشاره کرد. توجه به عواملی مانند تجدیدنظر در روش های تدریس ریاضی، توجه به یادگیری هوشمندانه و فهم رابطه ای به جای فهم ابزاری، فراهم کردن فضای کارگروهی در کلاس و ایجاد بحث و تبادل نظر، می تواند در کاهش دادن بدفهمی های ریاضی دانش آموزان مؤثر باشد. همچنین، بین عملکرد دانش آموزان دو گروه در مهارت های هندسی تفاوت معناداری در سطح ۰/۰۵ به سود دانش آموزان گروه آزمایش وجود داشت. بنابراین اگر معلمان از مدل ون هیلی در جهت آموزش مفاهیم و مهارت های هندسی استفاده کنند تا حدی بدفهمی های دانش آموزان کاهش می‌یابد.**

**ریحانی، شریفی و سلطانی (۲۰۰۹) نیز در مقاله خود به این نتیجه رسیدند که از عوامل مهم به وجود آمدن انواع بدفهمی ها در مبحث حد در میان دانش آموزان نحوهٔ آموزش این مفهوم است. تأکید آموزش بر دانش رویه ای به جای دانش مفهومی و همچنین شیوه های تدریس و نحوهٔ بیان مفهوم و عدم انطباق روش تدریس با روش های نوین آموزشی و عدم آگاهی از بدفهمی های احتمالی در حین تدریس و عدم توجه به سطح یادگیری پیشین دانش آموزان از عواملی هستند که آموزش مفهوم حد را دچار مشکل می‌کنند. روش مناسب برای آموزش یک مفهوم همان گونه که تال (۱۹۸۸) و وینر (۱۹۸۳) هم بیان کرده اند آن است که ابتدا فرصت های متعدد برای به دست آوردن تجربیات غنی و ساختن تصوراتی منسجم از یک مفهوم برای دانش آموزان فراهم شود، سپس برای آن مفهوم تعریف رسمی ارائه شود. مهم ترین باورها و بدفهمی های رایج در میان دانش آموزان درباره مفهوم حد از این قرارند: «حد غیر قابل دسترس است»، «حد به سادگی با جایگزین کردن مقدار نقطه در تابع به دست می آید»، «حد فرآیندی متحرک است»، «حد یک مرز برای تابع است» و «حد و مقدار تابع یکی هستند». این بدفهمی ها در ذهن دانش آموزان مانعی برای درک مفهومی حد ایجاد کرده و سبب شده است که آن ها درکی مناسب از مفهوم حد نداشته و محدود به روش های معمولی و قاعده‌مند باشند.**

**نوروزی، مهرمحمدی، ریحانی، فردانش و ایمانی (۲۰۱۶) نیزدر مقاله خود بیان کرده اند که بدفهمی ها می توانند در حوزه دانشی یا باوری دانش آموزان اتفاق افتاده و قابلیت حل مسئله دانش آموزان را تحت تاثیر قرار دهند. در بخش اصلاح بدفهمی های دانشی با توجه به اینکه بخش اعظم مفاهیم ریاضی دوره ابتدایی از قابلیت نمایش شهودی و عینی برخوردار است، از این موضوع به عنوان سنگ بنای روش اصلاحی بدفهمی های دانشی استفاده شده است. بدفهمی های دانش آموزان تنها محدود به حوزه ی دانشی آن ها نیست. بدفهمی های باوری یا همان باورهای نادرست به راحتی عملکرد دانش آموزان در حل مسئله را تحت تاثیر قرار می دهد. شونفلد (۲۰۱۰) نیز اشاره می کند، هر عمل معلم می تواند به ایجاد باورهای خاصی در دانش آموزان منجر شود. یکی از راه های اولیه اصلاح باور نادرست در دانش آموزان**

انجام خطاهای عمدی توسط معلم است. طبق پژوهش های انجام شده بر روی دانش آموزان سوم ابتدایی، اکثر کودکان ۹ ساله، به تازگی دوره اخلاقیات خودمحوری را پشت سر گذاشته و وارد دوره جدید نسبی گرایی اخلاقی شده اند. کودکان تا پیش از این، بزرگسالان را منشاء قوانین دانسته و افرادی مصون از هر گونه خطا تصور می نمودند. با ورود به این مرحله، کودکان به تدریج تشخیص می دهند که بزرگسالان افرادی مصون از اشتباه نیستند. لازم است دانش آموزان با این مسئله آشنا شوند که دانش به دست آمده، حاصل آزمون و خطاهای نسل بشر طی سالیان متوالی است. دانش آموزان باید به این نتیجه برسند که حل مسئله ریاضی مستلزم به کارگیری دقت، تلاش و استفاده از رسم شکل است و افراد توانمند نیز چنانچه این موارد را رعایت نکنند، نمی توانند در حل مسائل فوق موفق شوند.

در فصل اول کتاب ریاضی پایه دهم به بررسی مفهوم مجموعه، الگو و دنباله پرداخته شده است. دانش‌آموزان نخستین‌بار در پایه نهم با مفهوم مجموعه‌ها آشنا می‌شوند درحالی‌که از همان سال اول ابتدایی با الگو و الگویابی سروکار دارند.

مجموعه و تعاریفی مانند اجتماع و اشتراک از بنیادی ترین مفاهیم در ریاضیات هستند و غالباً نقطه آغازی برای ریاضیات پایه و کاربردهای آن در بسیاری از علوم محسوب می شوند. نمودار، جبر مجرد، آنالیز اعداد حقیقی، آنالیز اعداد مختلط، جبر خطی، نظریه اعداد، و مواردی از این دست همگی شاخه‌های مختلف ریاضیات هستند؛ اما یک چیز وجود دارد که در همه آنها مشترک است و آن مجموعه ها هستند. دنباله‌ها نیز در شاخه‌های مختلف ریاضیات از جمله جبر خطی، آنالیز ریاضی، توپولوژی و... بسیار کاربرد دارند. به همین علت این دو مبحث بسیار پراهمیت برشمره می شوند و در این پژوهش مورد بررسی قرار گرفته اند.

این پژوهش به بررسی علت بدفهمی دانش‌آموزان در این مفاهیم و میزان این بدفهمی‌ها پرداخته و در تلاش برای رفع آن‌ها است.

## چارچوب نظری تحقیق

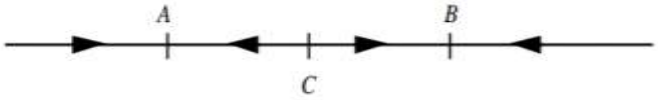
گرایش عموم جانداران ازجمله آدمیان این است که خود را با شرایط محیط زیست سازش دهند. این گرایش سازگاری نام دارد که نشان‌دهنده‌ی تلاش موجود زنده برای توافق با محیط خود است. بر اساس نظریه پیاژه، فرایند سازگاری به دو صورت انجام می‌گیرد:

۱-جذب (درون‌سازی): پاسخ دادن به محیط بر اساس الگوهای رفتاری یا طرحواره‌های (الگوهای سازمان‌یافته) از قبل آموخته شده.

۲- انطباق (برون‌سازی): عبارت است از ارتباط دادن اطلاعات جدید به ساختارهای شناختی موجود (طرحواره‌ها) (مقدمه ای بر نظریه یادگیری،۱۳۹۷)

برای مثال زمانی که مفهوم الگوی خطی برای دانش‌آموز معرفی می‌شود، دانش‌آموز ویژگی های الگوی خطی را جذب می‌کند (جذب). سپس زمانی‌که الگوی غیرخطی تدریس می‌شود، دانش‌آموز سعی می‌کند ویژگی‌های الگوی غیرخطی را با الگوی خطی تطبیق دهد (انطباق).

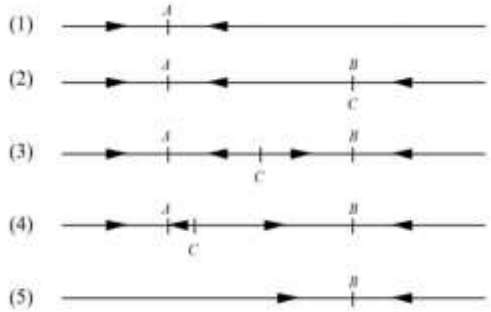
پژوهش حاضر براساس مقاله‌ی «تضادها و فاجعه‌ها در یادگیری ریاضیات» است. در این مقاله، دیوید تال (۱۹۷۷) مدل نظریه‌ی فاجعه را در ابعاد جزئی‌تر توضیح می‌دهد و بیان می‌کند که این نظریه شاخه‌های گسترده‌ای دارد که نظریه‌ی «یادگیری طرحواره‌ای» را بسط می‌دهد. ساختار طرحواره‌ها (schema) یک جریان پویا شامل «جذب کننده‌ها» و «دفع کننده‌ها» است. بین دو جذب‌کننده‌ی A و B دفع‌کننده‌ی C وجود دارد که از جریان یادگیری ناشی می‌شود.




شکل ۱. دو جذب کننده و دفع کننده ی میان آن ها

رویکرد نظریه فاجعه نشان می‌دهد که نباید تنها به جذب‌کننده‌ها که در سیستم پویای مغز ایجاد می‌شوند، توجه کرد. بلکه بازدارنده‌هایی (دفع کننده) نیز وجود دارند که مانع ایجاد ارتباط مناسب میان مفاهیم جدید می‌شوند. به‌عبارتی، وجود یک دفع‌کننده (مانع ذهنی)، باعث عدم دسترسی به جذب‌کننده‌ی دلخواه می‌شود. دانش‌آموز ممکن است در جذب‌کننده‌ی A باشد، اما معلم جذب‌کننده‌ی B را توضیح‌دهد. در این صورت دانش‌آموز نمی‌تواند فراتر از دفع‌کننده‌ی C که میان A و B است، برود. تا زمانی‌که تضاد C حل و فصل نشود، فهم و ادراک با دوام نخواهد بود.

این تضاد ها در واقع همان بدفهمی هایی هستند که یادگیرندگان با آن ها درگیر می شوند. حال این تضاد ها چگونه بر طرف می شوند تا دانش آموز بتواند از مفهوم قبلی A به مفهوم جدید B جهش کند. جذب کننده منفرد A را در نظر بگیرید.




شکل ۲. جهش از مفهوم A به مفهوم B

این مدل دینامیکی ساده در شکل بالا به عنوان توصیفی کیفی برای فعالیت های ذهنی است که می توانند در شکل‌گیری مفاهیم جدید رخ دهند. یادگیرنده در مرحله ی اول رشد شناختی مفهوم A را در دسترس دارد. همین طور که او مسیر رشد را می پیماید، موقعیت های جدید طوری برای او پیش می آیند که مفهوم A کمتر قابل دفاع بوده و فرد متوجه می شود که مفهوم A ناقص است. در این جا مفهوم B ظاهر می شود و بدین شکل تضاد C که ناسازگار است بین آن دو مفهوم (A و B) ایجاد می‌شود. اکنون دانش آموز در مرحله انتقال (تحول) بین مرحله ی (۲) و (٤)

است. او در موقعیت های نزدیک به A به سمت A می‌رود. اما یک تغییر در زمینه می‌تواند او را به B نزدیک‌تر کرده و احتمالا به سمت B کشیده شود. به اقتضای شرایط این امکان وجود دارد که او به طور ناگهانی تصمیم بگیرد از A به B یا برعکس از B به A جهش کند. جهش ناگهانی از مفهوم A (مفهوم قبلی و ناقص) به مفهوم B (مفهوم جدید و مناسب) می تواند با حس لذت و موفقیت در یادگیرنده همراه باشد. با این وجود تا زمانی که تضاد C همراه با مفهوم A حذف نشود، برگشتن به مفهوم قبلی A امکان پذیر است. در این مدل، در مرحله‌ی (٤) حذف اتفاق می افتد و تضاد C به طور کامل به مفهوم A برده می شود. یادگیرنده این تضاد را با تشخیص نامناسب بودن مفهوم A در زمینه ی وسیع برطرف کرده و A و C نیز حذف می شوند. درواقع تضاد C که ابتدا در مرحله (۲) و بعد به منظور جلوگیری از دسترسی به مفهوم B به کار رفته بود، حال برای خنثی کردن مفهوم A حرکت کرده و در نتیجه، در مرحله ی (۵) مفهوم B که مناسب تر و کامل تر است، باقی می ماند. ضمنا در این توصیف واژه ی "مفهوم "می تواند با واژه ی "طرح "جایگزین شود.

می‌توان نشان داد که میان مفهوم جذب و انطباق در نظریه پیاژه و مفهوم "فاجعه" در "نظریه‌ی فاجعه" ارتباط معناداری وجود دارد. درواقع فاجعه زمانی رخ می‌دهد که عمل انطباق به صورت نادرست انجام شود. در این میان معلم نقش بزرگی در برطرف‌کردن یا کاهش این بدفهمی‌ها دارد.

به بیانی دیگر زمانی‌که تعریفی از یک مفهوم (تعریف مفهومی) به دانش‌آموز ارائه می‌شود، در ذهن او تصوری (تصور مفهومی) ایجاد می‌شود که ممکن است درست یا غلط باشد. هر چه میزان فاصله (تفاوت) میان این دو (تعریف مفهومی و تصور مفهومی) بیشتر باشد، دانش‌آموز بیشتر دچار بدفهمی یا کج‌فهمی می‌شود (تال،۱۹۸۱) که استمرار آن باعث بروز فاجعه خواهد شد (تال،۱۹۷۷)

یکی از عواملی که منجر به بروز مشکلات جدی در یادگیری ریاضیات می‌شود، بدفهمی‌هایی است که بر اثر یاددهی نامناسب، تفکر غیررسمی و یا یادآوری ضعیف گذشته ایجاد می‌شوند. دو نوع از اشتباهات عمده‌ای که معمولاً دانش‌آموزان با آن‌ها درگیر هستند، عبارت‌اند از اشتباهات محاسباتی (غیر قابل پیش‌بینی و یا خطای ساده) و اشتباهات نظام‌مند. بدفهمی یک نوع اشتباه مفهومی نظام‌مند است و با اشتباه سهوی تفاوت دارد. بدفهمی به معنای تصور یا ایده اشتباه است.(بدفهمی های رایج ریاضی دانش آموزان ریاضی پایه دهم،۱۳۹۷). شناخت این بدفهمی‌ها و ریشه‌های ایجاد آن‌ها موجب ارتقای یادگیری می‌گردد. به نظر می‌رسد توجه جدی به بدفهمی های ریاضی باعث بهبود کیفیت آموزش ریاضی در مدارس می‌شود. لذا این مقاله با تمرکز بر فصل اول ریاضی دهم به دنبال شناسایی و رفع یا کاهش بدفهمی‌های دانش‌آموزان است. در پایان جهت رفع این بدفهمی‌ها، نظریه تنوع به کار برده شده و نتایج بررسی شدند.

نظریه ی تنوع یادگیری، بر تنوع به عنوان یک شرط لازم برای یادگیری تاکید می کند تا یادگیرندگان بتوانند جنبه های جدیدی از یک هدف یادگیری را تشخیص دهند. درواقع این نظریه، تغییر را به عنوان مولفه ای ضروری در تدریس به کار گرفته تا یادگیرندگان متوجه شوند چه چیزهایی را باید یاد بگیرند و در پی آن است که جنبه های مختلف در یک درس را برای یادگیرندگان مشخص کند. اساسا، نظریه تنوع بر اساس درک آگاهی ساخته شده است. شیء ای را که به عنوان "چیز" تجربه می‌کنیم، باید آن را تفکیک کرده و به یک زمینه مرتبط کنیم تا بتوانیم قطعات آن را تشخیص داده و به عنوان یک کل درک کنیم. اما آگاهی از تمام جنبه های یک موقعیت در یک زمان غیرممکن است. آگاهی ما

آن جنبه هایی را در بر می گیرد که مورد توجه ما هستند. در حالی که جنبه های دیگر به حاشیه رفته و تجربه نمی شوند. بنابراین کلیه ی تجربیات فرد، آگاهی او را مشخص می کند. با توجه به این نظریه، یادگیری در درجه اول شامل یک تغییر کیفی در مسیر تجربه ما از چیزی در جهان اطراف ما می باشد. هر شیء یا پدیده دارای چندین جنبه مانند شکل، اندازه و عملکرد است. اگر دو نفر یک پدیده را تجربه کنند و جنبه های مختلف آن را تشخیص دهند، دو روش متفاوت را برای تجربه یک پدیده مشابه نشان می دهند. درواقع شخص اول برخی از جنبه های آن شیء و دیگری جنبه های دیگر آن را مورد توجه قرار می دهد. برای شناخت یک جنبه ی خاص از یک پدیده، فراگیر نیازمند تجربه ی این جنبه خاص است و همین شناخت موجب تفاوت در ارزش آن جنبه می شود. درواقع هنگامی یک جنبه خاص، متفاوت می شود که تمام جنبه های دیگر این پدیده، به طور ثابت حفظ شود. به عنوان مثال هنگامی که سه توپ هم اندازه، هم شکل و هم جنس، اما با رنگ های مختلف به یک کودک داده شود، توجه کودک به رنگ توپ ها جلب می شود. زیرا رنگ توپ ها تنها جنبه ای است که متفاوت است. معلمان و مربیان نیز می توانند با تغییر یک جنبه و ثبات جنبه های دیگر در تدریس هر مبحث، به یادگیرندگان در ارتباط با درک و فهم ساختار ریاضی کمک کنند (حق جو و ریحانی، ۱۳۹۸).

تعدادی از مصداق های کاربرد این نظریه در مباحث درس اول و دوم ( مجموعه های متناهی و نامتناهی، متمم یک مجموعه) فصل اول ریاضی دهم به شرح زیر است:

۱. درک صحیح اعداد

- از دانش آموزان بخواهیم تا چند عدد گنگ، گویا، صحیح و طبیعی نام ببرند.

- چند عدد در اختیار دانش آموزان قرار داره و از آن ها بخواهیم تا گنگ، گویا، صحیح و طبیعی بودن آن ها را مشخص کنند.

۲. اعمال بین دو بازه A و B : دو بازه ی A و B را در اختیار دانش آموزان قرار داده و هر بار از آن ها می خواهیم تا یکی از عملیات های اجتماع، اشتراک، تفاضل A از B و تفاضل B از A را روی آن دو بازه انجام دهند.

۳. نمایش مجموعه ای، بازه ای و هندسی را به ترتیب زیر مورد پرسش قرار می دهیم:

- با دادن نمایش مجموعه ای، نمایش بازه ای یا محوری را از دانش آموز می خواهیم.

- با دادن نمایش بازه ای، نمایش مجموعه ای یا محوری را از دانش آموز می خواهیم.

- با دادن نمایش محوری، نمایش بازه ای یا مجموعه ای را از دانش آموز می خواهیم.

٤. عدد و بازه ی مربوط به آن ها

- از دانش آموز بخواهیم تا بزرگ ترین یا کوچک ترین عدد گنگ یا عدد گویا در یک بازه را معرفی کند. دانش آموزانی که ماهیت مجموعه اعدادگنگ و گویا را درک کرده باشند، می دانند که چنین عددی وجود ندارد.

- از دانش آموز بخواهیم تا در بازه ی مورد نظر ما، عددی گنگ یا گویا را مشخص کند.

- چند عدد و چند بازه را در اختیار دانش آموز قرار داده و از او بخواهیم هر عدد را به بازه ای که در آن قرار می گیرد وصل کند.

**۵. نمایش متمم مجموعه**

**- نمایش متمم مجموعه را به صورت نمودار ون، بازه ای و مجموعه ای( نمایش اعضا) مورد سنجش قرار دهیم.**

**- نمایش مجموعه های مجزا را به صورت نمودار ون، بازه ای و مجموعه ای (نمایش اعضا) مورد سنجش قرار دهیم**

**٦. به دست آوردن تعداد اعضای مجموعه به دو صورت**

**- با استفاده از نمودار ون**

**- با استفاده از رابطه ی** $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

**سوال‌های تحقیق**

**بیشترین بدفهمی‌های مربوط به فصل اول کتاب ریاضی دهم(مبحث مجموعه،الگو و دنباله) مربوط به چه محتوایی است؟**

**علت این بدفهمی‌ها چیست و از کجا سرچشمه می‌گیرند؟**

**روش تدریس معلم چه تاثیری در ایجاد یا رفع این بدفهمی‌ها دارد؟**

**تدریس بر اساس نظریه تنوع چه نقشی در بهبود این بدفهمی‌ها ایفا می‌کند؟**

**روش تحقیق**

**مطالعه‌ی حاضر، با استفاده از روش توصیفی-تحلیلی انجام شده است. در مرحله‌ی نخست از این پژوهش بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان در فصل اول ریاضی پایه دهم با پرس‌وجو از دبیران باسابقه جمع‌آوری شده و سپس بر اساس این بدفهمی‌ها، چهل سوال توسط نویسندگان مقاله طراحی شد. درنهایت با مشورت ده معلم باسابقه از طریق پرسش‌نامه‌های مجازی و امتیازدهی آنان به چهل سوال، نوزده سوال از چهل سوال که دارای بیشترین امتیاز بودند انتخاب شد (به شرح پیوست). هر یک از این سوالات دارای هدف خاصی بوده و مفهوم خاصی را سنجیده است. همچنین گزینه‌های هر یک از سوالات رتبه‌بندی شده است تا میزان این بدفهمی‌ها در دانش‌آموزان نیز اندازه گیری شود. گزینه‌ی دارای بیشترین رتبه، دورترین پاسخ (دارای فاصله‌ی زیاد با تعریف مفهومی) و گزینه‌ی دارای رتبه صفر، پاسخی درست قلمداد می‌شد. این نوزده سوال طی پرسشنامه‌ای در اختیار ۲۸٦ نفر از دانش‌آموزان دختر پایه‌ی دهم ریاضی و تجربی دبیرستان‌های شهرستان دزفول قرار گرفت. مدت زمان این آزمون برای دانش‌آموزان شصت دقیقه در نظر گرفته شده بود. بنا به توضیحات بالای هر پرسشنامه دانش‌آموزان می‌بایست به سوالات به صورت تشریحی پاسخ داده و سپس گزینه‌ی درست را انتخاب کنند تا علل این بدفهمی‌ها مشخص گردد. آلفاکرونباخ این آزمون خودساخته با نرم‌افزار SPSS نسخه ۲٦، ۰/۷۱٤ محاسبه شده است.**

**با توجه به پاسخگویی ۲۸٦ نفر از دانش‌آموزان دختر پایه دهم شهرستان دزفول به آزمون، تعداد دانش‌آموزانی که در مباحث مختلف فصل اول کتاب ریاضی دهم دچار بدفهمی شده بودند مشخص شد و در جدول ۱ درج گردید.**

**جدول۱. درصد بدفهمی دانش آموزان هر دوگروه**

| مفهوم | تعداد | درصد |
|---|---|---|
| مفهوم اعداد گنگ و گویا | ۱۴۸ | ۵۲٪ |
| درک و تصور درست از اعداد | ۱۱۴ | ۴۰٪ |
| مفهوم متناهی و نامتناهی بودن | ۴۳ | ۱۵٪ |
| فهم درست مجموعه‌ها | ۳۰ | ۱۰٪ |
| اعمال روی بازه‌ها | ۱۷۱ | ۶۰٪ |
| نمایش هندسی مجموعه‌ها | ۱۴۶ | ۵۱٪ |
| مفهوم مجموعه تهی | ۲۳ | ۸٪ |
| مفهوم زیرمجموعه‌بودن در جبر مجموعه‌ها | ۱۵۲ | ۵۳٪ |
| مفهوم متمم اشتراک | ۱۱۵ | ۴۰٪ |
| اعمال جبری روی مجموعه‌ها | ۱۳۳ | ۴۶/۵٪ |

| مفهوم | تعداد | درصد |
|---|---|---|
| تبدیل تفاضل به اشتراک | ۱۱۹ | ۴۲٪ |
| نمایش مجموعه‌ها با توجه به شکل هاشورخورده | ۱۲۸ | ۴۵٪ |
| اعمال روی مجموعه‌ها با توجه به شکل | ۱۹۷ | ۶۹٪ |
| تشخیص جملات دنباله | ۱۹۷ | ۶۹٪ |
| تشخیص نوع دنباله | ۵۲ | ۱۸٪ |
| تشخیص دنباله‌ی غیر خطی | ۸۱ | ۲۸٪ |
| مفهوم الگوی خطی | ۵۶ | ۱۹/۵٪ |
| نوشتن جمله‌ی عمومی | ۱۰۴ | ۳۶٪ |
| نوشتن جملات بعدی در یک الگو | ۵۱ | ۱۸٪ |

**سپس با استفاده از نرم‌افزار اکسل از میان سوالاتی که بیشترین فاجعه را داشتند، چهار سوال انتخاب شده است. همچنین از میان پرفاجعه‌ترین دانش‌آموزان نیز چهار نفر انتخاب شدند تا مورد مصاحبه قرار گیرند. منظور از پرفاجعه ترین سوالات سوالاتی هستند که دانش آموزان زیادی دورترین پاسخ ( گزینه با بیشترین رتبه) را انتخاب کردند. همچنین پرفاجعه ترین دانش آموزان، دانش آموزانی هستند که در اکثر سوالات گزینه های با بیشترین رتبه را انتخاب کرده اند. این مصاحبه‌ها جهت تایید بدفهمی دانش آموز است و نشان می دهد صرفا یک خطای سهوی نبوده است.**

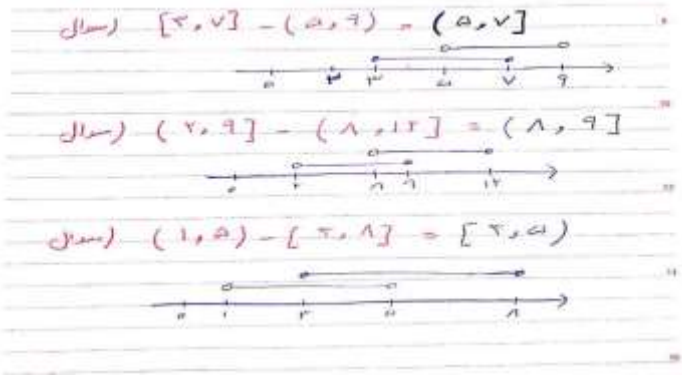
**الف) مصاحبه با دانش‌آموز اول (سوال پنجم پرسشنامه)**

**این دانش‌آموز راجع به نمایش اجتماع، اشتراک و تفاضل بازه‌ها مورد پرسش قرار گرفت. این سوال توسط ۱۷۱ نفر از دانش‌آموزان اشتباه پاسخ داده شده بود.**


**شکل۳. درصد پاسخگویی دانش آموزان به سوال پنجم پرسشنامه**

**طی مصاحبه، دانش آموز به این نتیجه رسید که هیچ‌کدام از بازه‌های مورد نظر در گزینه‌ها بسته نبوده و سوال اشتباه است. اولین بدفهمی او به کاربردن مفهوم اشتراک به جای مفهوم تفاضل بود.**

بعد از اینکه چند سوال راجع به اشتراک به او داده شد توانست به خوبی به آن‌ها پاسخ داده و تمایز میان اشتراک و تفاضل برای او آشکار شد. اما این بار مفهوم تفاضل را به صورت اشتباه به کار می‌برد. به این صورت که بازه‌ی اول را از بازه‌ی دوم کم می‌کرد (شکل ٤).



شکل ٤. پاسخ دانش آموز اول به سوالات مربوط به تفاصل بازه ها

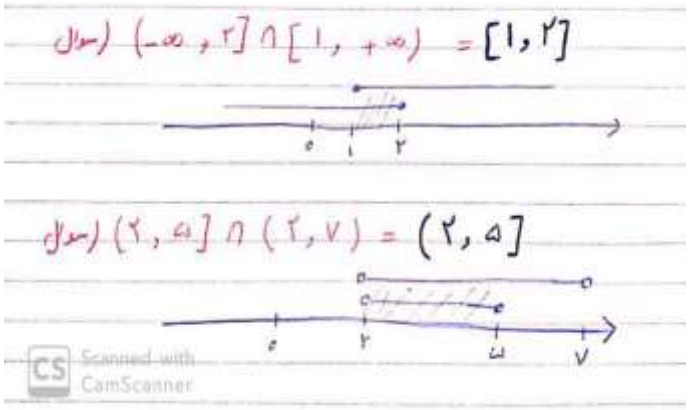
بدفهمی دیگر این دانش‌آموز مربوط به تعریف اجتماع دو بازه بود. بدین صورت که اجتماع دو بازه را بازه‌ای می‌دانست که از عنصر سمت چپ بازه‌ی اول شروع شده و تا عنصر سمت راست بازه‌ی دوم ادامه می‌یابد. در حالی که همیشه برقرار نیست. درواقع دانش‌آموز بر اساس تصور مفهومی خود این تعریف را به دست آورده بود. برای مثال

$$\left(-۵,۱\right] \cup \left[٤,٦\right] \neq \left(-۵,٦\right]$$

دانش آموز فقط هنگام بررسی اجتماع دو بازه که پیوسته نیستند، با تصور مفهومی خود به پاسخ درست می‌رسید.

$$\left(-\infty,۲\right] \cup \left[-٤,۹\right] = \left(-\infty,۹\right]$$

همچنین این دانش‌آموز در اشتراک دو بازه نیز دچار بدفهمی نشده بود (شکل، ۵).

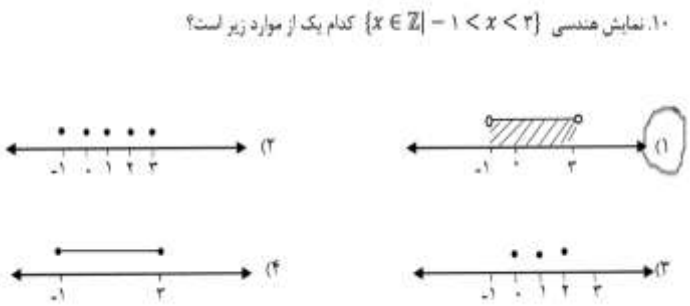


**ب) مصاحبه با دانش‌آموز دوم (سوال ششم پرسشنامه)**

**این دانش‌آموز راجع به نمایش هندسی مجموعه‌ها مورد پرسش قرار گرفته است. ۱٤٦ نفر از دانش‌آموزان به این سوال پاسخ اشتباه داده‌اند.**

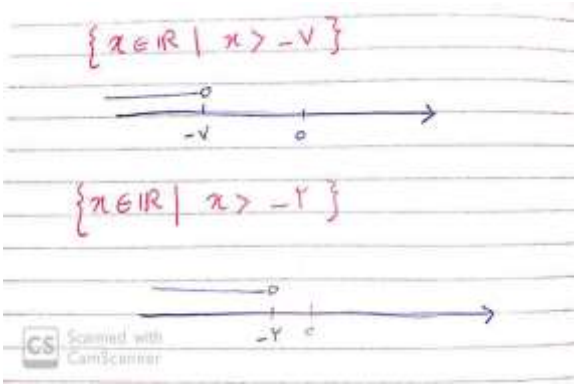

**شکل۵. درصد پاسخگویی دانش آموزان به سوال ششم پرسشنامه**

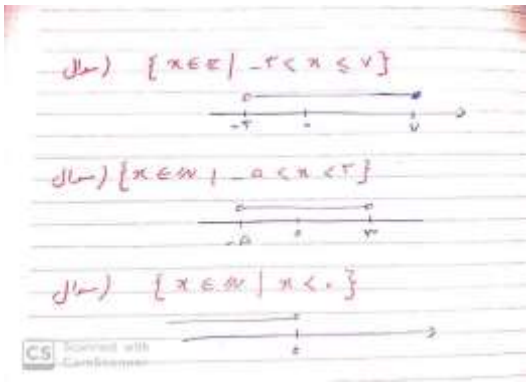
**دانش آموز مورد مصاحبه گزینه یک (گزینه دارای فاجعه ۲ ) را انتخاب کرد.**



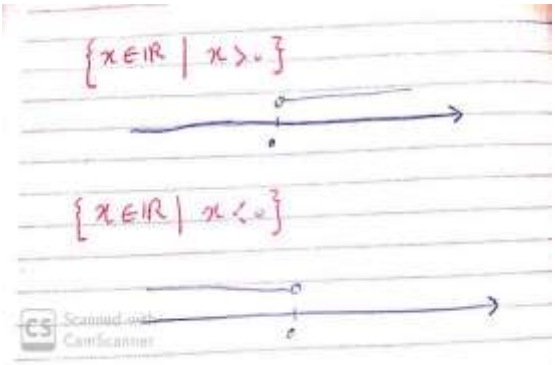

**شکل ٦. پاسخ دانش‌آموز دوم به سوال دهم**

**این دانش‌آموز در نمایش هندسی مجموعه‌ها درک صحیحی از اعداد صحیح و اعداد طبیعی نداشت. درواقع اعداد حقیقی را به جای اعداد صحیح و اعداد طبیعی در نظر می‌گرفت. از دیگر بدفهمی‌های این دانش‌آموز عدم درک صحیح اعداد منفی بود. او بر این عقیده بود هر چه مقدار (قدر مطلق) اعداد منفی بزرگ‌تر شود، آن اعداد نیز بزرگ‌تر می‌شوند.**



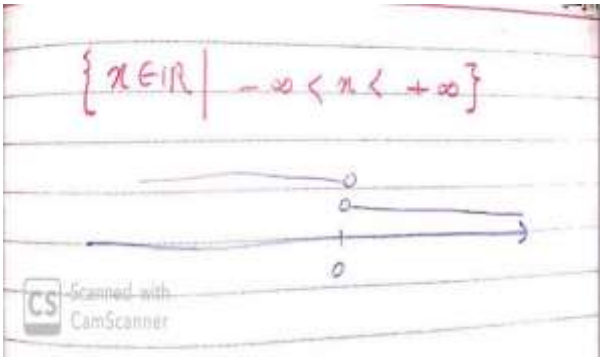




**این درحالی است که برای اعداد کوچک‌تر یا بزرگ‌تر از صفر دچار بدفهمی نشده بود.**

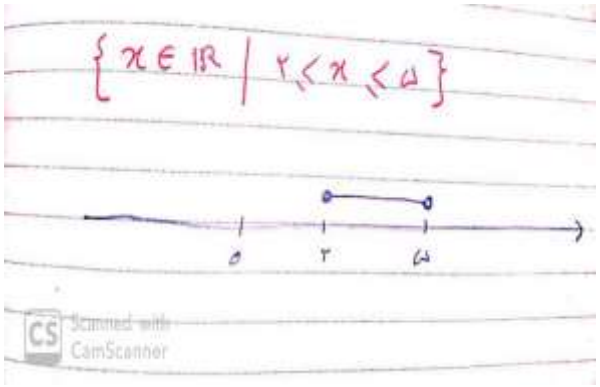



**همچنین این دانش‌آموز برای علامت‌های $\geq$ و $\leq$ دایره‌های توپر و برای علامت‌های $>$ و $<$ دایره‌های توخالی استفاده می‌کرد و از این حیث دچار بدفهمی نشده بود.**

**سومین بدفهمی دانش‌آموز که طی مصاحبه آشکار شد این بود که $(-\infty.0) \cup (0.+\infty)$ را برابر با $(-\infty.+\infty)$ می‌دانست.**

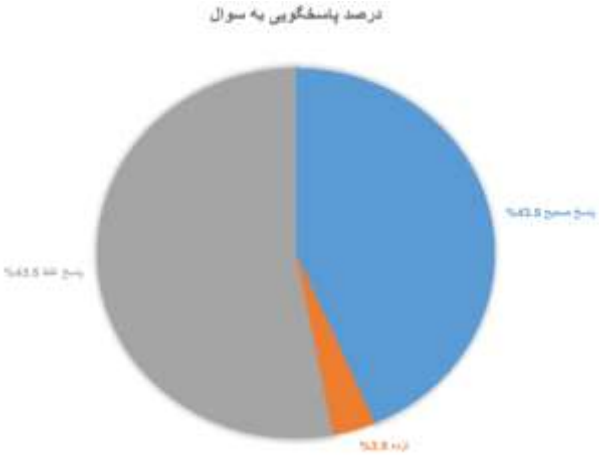



**دانش‌آموز در نمایش هندسی مجموعه‌هایی که اعضای آن عضو اعداد حقیقی هستند، دچار بدفهمی نشده بود.**




**ث) مصاحبه با دانش‌آموز سوم (سوال نهم پرسشنامه)**

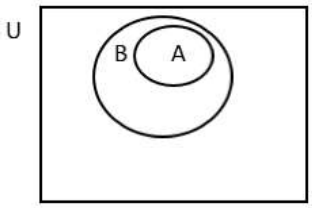
**طبق بررسی های انجام شده بر روی پرسشنامه ها، ۱۵۱ نفر از دانش‌آموزان، به این سوال اشتباه پاسخ دادند.**




**شکل ۷. درصد پاسخگویی دانش آموزان به سوال نهم پرسشنامه**

**این دانش‌آموز سوالات ۸ و۱۰ را که هر دو مربوط به مبحث متمم مجموعه بود، درست پاسخ داده بود. بنابراین حدس ما این بود که احتمالا دانش‌آموز در سوالاتی که مجموعه با عضوهایش مشخص شده است، مشکلی ندارد و بدفهمی دانش‌آموز زمانی رخ می‌دهد که مجموعه بدون عضوهایش معرفی شود. برای اطمینان از این فرضیه، سوالات زیر به دانش‌آموز ارائه شد.**

**سوال اول) با توجه به شکل زیر، به سوالات پاسخ دهید.**

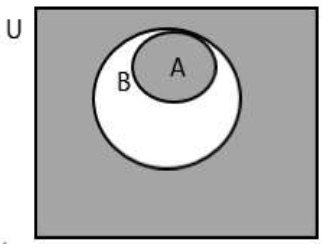


**گام اول) $\acute{A}$ را مشخص کنید.**

**پاسخ دانش آموز: صحیح**

**گام دوم) $\acute{A} \cup \acute{B}$ را مشخص کنید.**

**پاسخ دانش آموز: دانش آموز ابتدا شکل زیر را رسم کرد.**




**دانش آموز به اشتباه برای مشخص کردن متمم مجموعه ی B، مجموعه ی A را نیز رنگ زد.**

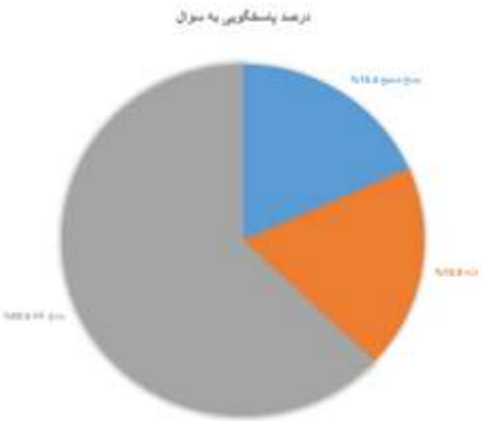
**سوال دوم: اگر $U = \{a.b.c.d\}$ مجموعه ی مرجع باشد و $A = \{a.b\}$ و $B = \{a.b.c\}$، در این صورت $A \subseteq B$ می باشد. با به دست آوردن $\acute{A}$و $\acute{B}$ ، رابطه ی بین آن ها را مشخص کنید.**

**هدف از سوال یافتن رابطه ی متمم زیرمجموعه های مجموعه های مرجع در مجموعه هایی است که با اعضا مشخص شده اند.**

**پاسخ دانش آموز به سوال کاملا درست بود. بنابراین فرضیه ی ما کاملا درست بود.**

**پ) مصاحبه با دانش‌آموز چهارم (سوال چهاردهم پرسشنامه)**

**طبق بررسی‌های انجام‌شده بر روی پرسشنامه‌ها ۱۹۷ نفر به این سوال اشتباه پاسخ داده بودند.**



**شکل ۸. درصد پاسخگویی دانش آموزان به سوال چهاردهم پرسشنامه**

**طبق بررسی‌های انجام‌شده بر روی پاسخ‌های تشریحی دانش‌آموزان مشخص شد که اکثرا، به اشتباه، جمله اول را به صورت $a + d$ نوشته بودند و گروهی نیز به جای سه جمله سوم $(a + 6d. a + 7d. a + 8d)$ سه جمله دوم را نوشته یا ضرایب $d$ را اشتباه نوشته بودند.**

در مرحله دوم پژوهش، تعدادی از دانش‌آموزان دختر پایه دهم رشته تجربی به صورت تصادفی خوشه‌ای انتخاب شدند تا نمونه انتخابی معرف خوبی برای جامعه باشد. سپس از مدارس واجد شرایط چهار مدرسه و از هر مدرسه یک کلاس به تصادف انتخاب شد. همچنین چهار مدرسه به تصادف، به دو گروه کنترل و آزمایش تقسیم شدند که تعداد گروه کنترل ۵۰ دانش‌آموز و تعداد گروه آزمایش نیز ۵۰ نفر بود. "مبحث مجموعه‌ها" در گروه کنترل به روش متداول و در گروه آزمایش با استفاده از نظریه تنوع و گوش‌زد کردن بدفهمی‌ها تدریس شد. سپس بار دیگر سوالاتی از پرسشنامه که مربوط به "مبحث مجموعه‌ها" بود (۱۳ سوال)، در اختیار هر دو گروه قرار گرفت و نتایج آن بررسی شد.

**تجزیه و تحلیل**

در جدول ۲، میزان فاجعه دو گروه کنترل و آزمایش در سوال اول پرسشنامه مقایسه می‌شود.

جدول ۲. مقایسه میزان فاجعه دو گروه کنترل و آزمایش در سوال اول پرسشنامه

| هدف سوال) درک صحیح اعداد گنگ، گویا و صحیح | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| فاجعه | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | بدون جواب |
| گروه کنترل | ۳۶ | ۳ | ۲ | ۹ | ۰ |
| گروه آزمایش | ۳۳ | ۰ | ۳ | ۱۲ | ۲ |

تحلیل سوال اول) این سوال درک صحیح از اعداد و مفهوم اعداد گنگ، گویا و صحیح را در دانش آموزان مورد بررسی قرار می دهد. دانش آموزان نسبت به اعداد صحیح شناخت بیشتری دارند، زیرا این اعداد را می توانند به وضوح روی محور نشان داده و ببینند. بنا براین در این مورد کمتر دچار بدفهمی و خطا می شوند. اما ماهیت اعداد گنگ و پس از آن اعداد گویا باعث می شود درک آن ها برای دانش آموز سخت شود. برخی از آن ها نمی توانند تصور کنند که میان دو عدد صحیح متوالی بی شمار عدد گویا و بی شمار عدد گنگ وجود دارد و به همین علت قادر به پاسخ گویی به این سوال نخواهند بود. بیش از نیمی از دانش آموزان در دو گروه کنترل و آزمایش به این سوال پاسخ صحیح (پاسخ دارای فاجعه صفر) دادند. اما بر خلاف تصور ذهنی ما، تعداد بیشتری از دانش آموزان در دو گروه گزینه ی دوم ( گزینه با فاجعه ی سه) را انتخاب کردند. به نظر می آمد آن ها با درک ماهیت اعداد صحیح کنار نیامده اند. زیرا وجود کوچک ترین عدد صحیح کوچک تر از سه را تایید کردند، در حالی که اگر تا منفی بی نهایت نیز پیش برویم، نمی توانیم این عدد را بیابیم. دانش آموز باید بداند که منفی بی نهایت یک مفهوم بوده و عدد نیست و از هر عددی که تصور کنیم کوچک تر است.

جدول ۳. مقایسه میزان فاجعه دو گروه کنترل و آزمایش در سوال دوم پرسشنامه

| هدف سوال) درک صحیح از اعداد | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| فاجعه | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | بدون جواب |
| گروه کنترل | ۲۶ | ٤ | ۳ | ۱٦ | ۱ |
| گروه آزمایش | ٤۱ | ۰ | ٦ | ۳ | ۰ |

**تحلیل سوال دوم) سوال دوم پرسشنامه مانند سوال اول در پی سنجیدن میزان درک دانش آموزان از مجموعه اعداد گنگ، گویا و صحیح است. این سوال را می توان تعمیمی از فعالیت صفحه ی هفت کتاب درسی دانست، با این تفاوت که جنبه کلی تری را سنجیده و دیدگاه کلی تری به دانش آموز می دهد. اکثر دانش آموزان در گروه آزمایش به این سوال، پاسخ درست دادند. در حالی که در گروه کنترل فقط نیمی از دانش آموزان به درستی پاسخ دادند و درصد قابل توجهی از آن ها (۱٦نفر) تصور می کردند، می توانند دو عدد صحیح را بیابند که میان آن ها عددی گنگ وجود نداشته باشد.**

**جدول٤. مقایسه میزان فاجعه دو گروه کنترل و آزمایش در سوال سوم پرسشنامه**

| هدف سوال) مفهوم متناهی و نامتناهی بودن مجموعه | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| فاجعه | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | بدون جواب |
| گروه کنترل | ۳۸ | ٤ | ٦ | ۲ | ۰ |
| گروه آزمایش | ٤۷ | ۰ | ۰ | ۲ | ۱ |

**تحلیل سوال سوم) این سوال مجموعه های متناهی و نامتناهی را مورد پرسش قرار می دهد. تقریبا همه ی افراد در گروه آزمایش و ۷٦ درصد افراد در گروه کنترل به این سوال به درستی پاسخ دادند. به نظر می آید اکثر دانش آموزان با استفاده از تعریف مفهومی مجموعه متناهی و نامتناهی قادر به پاسخ گویی به این گونه سوالات هستند و تنها ۱۲ نفر از دانش آموزان گروه کنترل قادر نبودند به این سوال پاسخ درست دهند.**

**جدول ۵. مقایسه میزان فاجعه دو گروه کنترل و آزمایش در سوال چهارم پرسشنامه**

| هدف سوال) درک درست مجموعه ها | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| فاجعه | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | بدون جواب |
| گروه کنترل | ٤۳ | ۷ | ۰ | ۰ | ۰ |
| گروه آزمایش | ٤۸ | ۱ | ۰ | ۰ | ۱ |

**تحلیل سوال چهارم) این سوال جایگاه اعداد روی یک نمودار را مورد سنجش قرار می دهد. تقریبا همه ی افراد گروه آزمایش که تحت نظریه تنوع آموزش دیده بودند، به این سوال به درستی پاسخ دادند. درصد بالایی از گروه کنترل نیز پاسخ درست دادند، اما ۷ نفر از آن ها بدون توجه به تعریف مجموعه اعداد گویا $\frac{3}{2}$ (گزینه با فاجعه ی یک) را انتخاب کردند. هیچ یک از دانش آموزان با این که اعداد صحیح مثبت و منفی دارای مخرج یک بوده و می توانند در مجموعه ی اعداد گویا قرار بگیرند، دچار بدفهمی نشده بود.**

جدول ٦. مقایسه میزان فاجعه دو گروه کنترل و آزمایش در سوال پنجم پرسشنامه

| هدف سوال) اعمال روی بازه ها | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| فاجعه | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | بدون جواب |
| گروه کنترل | ۱۸ | ٦ | ۱۹ | ٦ | ۱ |
| گروه آزمایش | ۱۵ | ۱۳ | ٦ | ١٤ | ۲ |

تحلیل سوال پنجم) این سوال اعمال روی بازه ها ( اجتماع، اشتراک و تفاضل) را مورد پرسش قرار داده و از دانش آموز می خواهد تا بازه ی بسته را بیابد. ٦ نفر از دانش آموزان گروه کنترل بازه ای را که دارای منفی بی نهایت است، بازه ای بسته دانستند(گزینه ی دارای فاجعه ی سه)، ۱۹ نفر از آن ها اشتراک دو بازه ی باز را بازه ای باز دانستند( گزینه دارای فاجعه دو) و ٦ نفر نیز بازه نیم بسته را بازه ای بسته دانسته اند(گزینه ی دارای فاجعه ی یک). این سوال نه تنها در گروه کنترل، بلکه در گروه آزمایش نیز دانش آموزان را دچار خطا کرد و از پرفاجعه ترین سوالات پرسشنامه محسوب می شود.

جدول ۷. مقایسه میزان فاجعه دو گروه کنترل و آزمایش در سوال ششم پرسشنامه

| هدف سوال) نمایش هندسی مجموعه ها | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| فاجعه | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | بدون جواب |
| گروه کنترل | ٢٤ | ۵ | ۱۸ | ۳ | ۰ |
| گروه آزمایش | ۳۵ | ۲ | ۱۲ | ۱ | ۰ |

تحلیل سوال ششم) این سوال راجع به نمایش هندسی مجموعه ها بود و از دانش آموزان می خواست تا با توجه به نمایش مجموعه ای صورت سوال، نمایش هندسی مربوط به آن را مشخص کنند. ٢٤ نفر از دانش آموزان گروه کنترل توانستند به جواب درست دست یابند. این در حالی است که ۳۵ نفر از دانش آموزان گروه آزمایش جواب درست داده بودند. همچنین ۱۸ نفر از گروه کنترل به مجموعه ی مرجع بی توجه بوده و نمایشی را که در آن مجموعه ی مرجع، مجموعه ی اعداد حقیقی بود، انتخاب کردند. ۵ نفر از آن ها نیز با وجود این که مجموعه ی مرجع را درست تشخیص دادند، اما نقاط مرزی را چک نکرده و آن ها را نیز در نمایش هندسی نشان دادند. توجه به مجموعه ی مرجع در نمایش هندسی مجموعه ها باید تاکید گردد.

جدول ۸. مقایسه میزان فاجعه دو گروه کنترل و آزمایش در سوال هفتم پرسشنامه

| هدف سوال) مفهوم مجموعه ی تهی | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| فاجعه | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | بدون جواب |
| گروه کنترل | ٤۲ | ٤ | ۲ | ۲ | ۰ |
| گروه آزمایش | ٤۹ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ |

**تحلیل سوال هفتم) این سوال پرسشنامه مفهوم مجموعه ی تهی را مورد سنجش قرار داده است. با وجود اینکه درگروه آزمایش همگی به جز یک نفر، به درستی پاسخ دادند، اما در گروه کنترل ۸ نفر اشتباه جواب دادند و مجموعه تهی را همان مجموعه ای پنداشتند که صفر عضوی از آن است.**

**جدول ۹. مقایسه میزان فاجعه دو گروه کنترل و آزمایش در سوال هشتم پرسشنامه**

| هدف سوال) مفهوم متمم اشتراک | | | | |
|---|---|---|---|---|
| فاجعه | ۰ | ۱ | ۲ | بدون جواب |
| گروه کنترل | ۳۲ | ۹ | ۹ | ۰ |
| گروه آزمایش | ۳۷ | ۸ | ٤ | ۱ |

**تحلیل سوال هشتم) این سوال راجع به متمم اشتراک دو مجموعه با توجه به نمودار ون بحث می کند. تعداد جواب های صحیح در دو گروه کنترل و آزمایش به ترتیب ۳۲ و ۳۷ نفر بوده است. ۹ نفر از گروه کنترل با انتخاب گزینه یک یا دو(گزینه های دارای فاجعه دو) خود اشتراک را نیز در متمم اشتراک قرار دادند. ۹ نفر از آن ها نیز متمم اشتراک دو مجموعه را اعضایی می دانند که در اشتراک دو مجموعه نباشند، اما حداقل در یکی از آن دو مجموعه حتما حضور داشته باشند. در حالی که در گروه آزمایش، شاهد هستیم که تعداد کم تری از دانش آموزان دچار این بدفهمی شده اند.**

**جدول ۱۰. مقایسه میزان فاجعه دو گروه کنترل و آزمایش در سوال نهم پرسشنامه**

| هدف سوال) مفاهیم جبر مجموعه ها | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| فاجعه | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | بدون جواب |
| گروه کنترل | ۱٦ | ۷ | ۰ | ۲۵ | ۲ |
| گروه آزمایش | ۱٦ | ۷ | ۰ | ۲۷ | ۰ |

**تحلیل سوال نهم) این سوال مفاهیم جبر مجموعه ها را مورد سنجش قرار می دهد. دانش آموز باید دو مفهوم زیر مجموعه بودن و متمم را بلد باشد تا بتواند به جواب درست دست یابد. هیچ یک از دانش آموزان متمم A و متمم B را برابر هم ندانستند، اما در اینکه کدام یک زیر مجموعه ی دیگری است دچار بدفهمی شده بودند. ۷ نفر از آن ها پنداشتند که چون مجموعه B بزرگ تر است، پس متمم آن نیز بزرگتر است و به همین ترتیب چون مجموعه ی A کوچک تر است، متمم آن نیز کوچک تر است. به همین علت نتیجه گرفتند که $\acute{A} \subseteq \acute{B}$ . در هر دو گروه کنترل و آزمایش شاهد بودیم که گزینه های با فاجعه ی سه بالاترین میزان انتخاب را به خود اختصاص دادند. در حالی که:**

**$\acute{A} \cap \acute{B} = \emptyset$ هنگامی درست است که دو مجموعه ی مجزای A وB وجود داشته باشند و$U = A \cup B$ باشد.**

**$\acute{A} \cup \acute{B} = U$ نیز هنگامی درست است که دو مجموعه ی A و B مجزا باشند.**

**با توجه به شکل داریم:**

$$\acute{A} \cap \acute{B} = U - B = \acute{B} \neq \emptyset$$

$$\acute{A} \cup \acute{B} = U - A = \acute{A} \neq U$$

جدول ۱۱. مقایسه میزان فاجعه دو گروه کنترل و آزمایش در سوال دهم پرسشنامه

| هدف سوال) مفاهیم جبر مجموعه ها | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| فاجعه | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ٤ | بدون‌جواب |
| گروه کنترل | ۳۱ | ۲ | ۷ | ۱۰ | ۰ | ۰ |
| گروه آزمایش | ۳۵ | ۲ | ۲ | ۱۰ | ۱ | ۰ |

تحلیل سوال دهم) این سوال اعمال مختلف اعم از اشتراک، تفاضل، اجتماع و متمم گیری را مورد سنجش قرار می دهد. ۲ نفر از گروه کنترل در عملیات اشتراک بین دو مجموعه دچار بدفهمی شده بودند و اشتراک را تهی پنداشتند. در حالی که اشتراک آن ها مجموعه ی $\{10\}$ است. همچنین ۷ نفر ازآنها $A - B$ را تهی می دانستند، در حالی که تفاضل این دو مجموعه، مجموعه ی $\{7.5\}$ می شود و ۱۰ نفر از آن ها گزینه ی با فاجعه ی سه را انتخاب کردند و متمم اشتراک را تهی پنداشتند، در حالی که دارای چهار عضو ۷، ۵، ۲ و ٤ بود. دانش آموزان در عمل متمم گیری دچار بدفهمی شده اند.

جدول ۱۲. مقایسه میزان فاجعه دو گروه کنترل و آزمایش در سوال یازدهم پرسشنامه

| هدف سوال) مفاهیم جبر مجموعه ها | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| فاجعه | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ٤ | بدون‌جواب |
| گروه کنترل | ۳٤ | ۸ | ۰ | ٤ | ۱ | ۳ |
| گروه آزمایش | ۳۳ | ۱۲ | ۲ | ۱ | ۰ | ۲ |

تحلیل سوال یازدهم) این سوال مفاهیم جبر مجموعه را سنجیده است و عبارتی که با $A - B$ برابر است را می خواهد. بالغ بر نیمی از دانش آموزان در هر دو گروه به این سوال به درستی پاسخ دادند. در این میان ٤ نفر از دانش آموزان گروه کنترل، تفاضل $A - B$ را با $B - A$ برابر دانستند. باقی دانش آموزان به جای $A \cap \acute{B}$، عبارت $\acute{A} \cap B$ را گزینه ی درست پنداشتند.

جدول ۱۳. مقایسه میزان فاجعه دو گروه کنترل و آزمایش در سوال دوازدهم پرسشنامه

| هدف سوال) مفاهیم جبر مجموعه ها | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| فاجعه | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | بدون جواب |
| گروه کنترل | ۲۲ | ۱۳ | ۱۰ | ۳ | ۲ |
| گروه آزمایش | ۳۵ | ۳ | ۱۱ | ۰ | ۱ |

**تحلیل سوال دوازدهم) این سوال نیز راجع به مفاهیم جبر مجموعه ها بود. افزون بر نیمی از دانش آموزان گروه کنترل به این سوال جواب نادرست دادند. دانش آموزان باید گزینه ای را انتخاب می کردند که برابر با مجموعه ی $A$ شود اما ۱۳ نفر از آن ها عبارتی را که برابر با $B$ بود انتخاب کردند و۱۰ نفر نیز عبارتی را که برابر با $A - B$ بود انتخاب کردند. ۳ نفر نیز عبارتی که برابر با $\acute{B}$ بود انتخاب کردند(گزینه چهار با فاجعه سه)، در حالی که در گزینه ی چهارم $\acute{A}$ و $\acute{B}$ هیچ اشتراکی باهم نداشته و تفاضل آن ها همان $\acute{B}$ می شود.**

**جدول ١٤. مقایسه میزان فاجعه دو گروه کنترل و آزمایش در سوال سیزدهم پرسشنامه**

| هدف سوال) مفاهیم جبر مجموعه ها | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| فاجعه | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | بدون جواب |
| گروه کنترل | ۲۱ | ۱۱ | ۱۲ | ١٤ | ۲ |
| گروه آزمایش | ۳۸ | ۵ | ٤ | ۳ | ۰ |

**تحلیل سوال سیزدهم) موضوع این سوال نیز مفاهیم جبر مجموعه ها بود. در عبارت $B - A$ در واقع $A$ از $B$ کم شده و بدین شکل آن قسمتی از $B$ باقی می ماند که در $A$ نیست و اگر این شرط در قسمتی از $B$ برقرار نباشد، آن قسمت از $B$ در جواب قرار نمی گیرد. در حالی که دانش آموز می پندارد که کل مجموعه $B$ را می تواند در نظر بگیرد و اشتراک $A$ و $B$ را از آن کم نکرده است( برای $A - B$ نیز همین طور است). ۱۱ نفر از دانش آموزان در گروه کنترل دچار این بدفهمی شده بودند.**

**همچنین ۱۲ نفر پنداشتند که $A \cup B = U$ است. یعنی مجموعه ی مرجع را $A \cup B$ در نظر گرفتند. در حالی که چنین نیست. ١٤ نفر از دانش آموزان این گروه نیز گزینه ی آخر با فاجعه ی سه را انتخاب کردند. در حالی که وقتی $A \subseteq B$ باشد، $A \cap B$ برابر با مجموعه ی کوچک تر می شود، نه مجموعه ی بزرگتر. $A \cup B$ است که برابر با مجموعه بزرگ تر می شود، نه اشتراک.**

**تحلیل های آماری**

**در مرحله دوم پژوهش، صد نفر از دانش‌آموزان هم‌سطحِ جامعه آماری به دو گروه مساوی کنترل و آزمایش تقسیم شدند. گروه آزمایش به روش نظریه تنوع و گروه کنترل به روش متداول تدریس شد. سپس میزان تاثیرگذاری آموزش رفع بدفهمی‌های مربوط به "مجموعه‌ها" بر دانش‌آموزان با استفاده از آزمون تی مورد بررسی قرار داده شد.**

**با توجه به جدول ۱۵ میانگین نمرات گروه کنترل ۱۱/۷۲۲ و انحراف معیار آن‌ها برابر با ۳/۹۱۸۰۸٦ است. همچنین میانگین نمرات گروه آزمایش ١٤/۳۸و انحراف معیارآن‌ها برابر با ۳/۸٦۰٦٦٥ است.**

جدول ۱۵. میانگین و انحراف معیار نمرات گروه کنترل و آزمایش

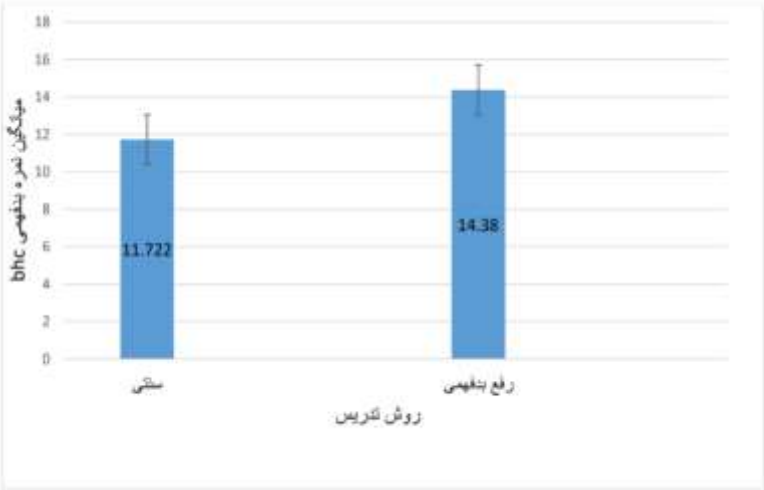
| گروه | تعداد | میانگین | انحراف معیار |
|---|---|---|---|
| کنترل | ۵۰ | ۱۱/۷۲۲ | ۳/۹۱۸۰۸۶ |
| آزمایش | ۵۰ | ۱٤/۳۸ | ۳/۸٦۰٦٦٥ |

همچنین در جدول ۱٦ پیداست با توجه به مقدار p=۰/٦٦٤ در بررسی واریانس‌های دو گروه در سطح معناداری ۰/۰۵، فرض مساوی بودن واریانس‌های دو گروه پذیرفته می‌شود. حال برای بررسی وجود اختلاف میانگین، از مقدار p مربوط به آزمون t با واریانس‌های برابر استفاده می‌شود. مقدار p برابر با ۰/۰۰۱ شد و فرض مساوی بودن میانگین‌ها رد می‌شود و در نتیجه فرض وجود اختلاف بین میانگین‌ها پذیرفته می‌شود. یعنی میانگین نمره‌ی کل بدفهمی در گروه آزمایش کمتر شده، پس آموزش "مجموعه‌ها" بر اساس نظریه تنوع در دانش آموزان تاثیرگذار است و می توان نتیجه گرفت که آموزش بر اساس نظریه تنوع موجب کاهش بدفهمی‌های مربوط به "مجموعه‌ها" می شود.

جدول۱٦. نتایج آزمون t

| گروه | شاخص های آماری آزمون t | | | مقدار p برای بررسی واریانس های دو گروه |
|---|---|---|---|---|
| کنترل | مقدار t | درجه آزادی | مقدار p | ۰/۶۶۴ |
| آزمایش | -۳/۳۸۳ | ۹۸ | ۰/۰۰۱ | |

شکل زیر تفاوت بین میانگین نمرات بدفهمی های مربوط به "مجموعه‌ها" را برای دو گروه کنترل و آزمایش نشان می‌دهد.




شکل ۹. مقایسه نمرات دانش آموزان تدریس شده به دو روش سنتی و رفع بدفهمی

**نتیجه‌گیری**

**در این تحقیق، داده ها در دو سطح توصیفی و استنباطی تجزیه و تحلیل شدند. بخش توصیفی شامل جدول فراوانی(جدول۱) و نمودارهای مربوطه (نمودار های دایره ای و نمودار میانگین و انحراف معیار) است و در بخش استنباطی نیز از آزمون t استفاده شده است. بر اساس نتایج به دست آمده از آزمون‌های خودساخته، بیشترین بدفهمی دانش‌آموزان در مفاهیم متمم مجموعه‌ها، تشخیص جملات یک دنباله، نمایش هندسی مجموعه‌ها و تشخیص باز و بسته بودن بازه‌ها پس از اعمال جبر مجموعه است.**

**ازجمله بدفهمی هایی که دانش آموزان با آن ها مواجه بودند:**

**۱- مفهوم اشتراک را به جای مفهوم تفاضل به کار می برند.**

**۲- در تفاضل $A - B$، $A$ را از $B$ کم می کنند.**

**۳- اجتماع دو بازه را بازه ای می دانند که که از عنصر سمت چپ بازه اول شروع شده و تا عنصر سمت راست بازه دوم ادامه می یابد.**

**٤- در نمایش هندسی مجموعه ها، اعداد حقیقی را به جای اعداد صحیح و طبیعی به عنوان مجموعه مرجع در نظر می گیرند.**

**٥- درک صحیحی از اعداد منفی ندارند.**

**٦- آن ها هنگامی که مجموعه ها با اعضایشان مشخص نیستند، برای یافتن متمم مجموعه دچار خطا می شوند.**

**۷- آن ها جمله اول دنباله را $a + d$ می نویسند.**

**۸- مجموعه با عضو صفر را برابر با مجموعه تهی می دانند.**

**۹- درک صحیحی از مجموعه اعداد گنگ و گویا ندارند.**

**۱۰- اشتراک را در متمم اشتراک قرار می دهند.**

**۱۱- مجموعه ای که بزرگتر است را دارای متمم بزرگتر نیز می دانند.**

**۱۲- $A - B$ را با $B - A$ برابر می دانند.**

**نتایج به دست آمده از این تحقیق با نتایج تحقیقات تال(۱۹۸۱) همراستا بوده و نشان می‌دهد به همان میزان که باید به جذب‌کننده ها توجه کرد، بازدارنده‌ها را نیز باید به عنوان مانعی برای ایجاد ارتباط مناسب میان مفاهیم حائز اهمیت دانست. میان مفهوم جذب و انطباق در نظریه پیاژه و مفهوم "فاجعه" در "نظریه‌ی فاجعه" ارتباط معناداری وجود دارد. درواقع فاجعه زمانی رخ می‌دهد که عمل انطباق به صورت نادرست انجام شود. در این میان معلم نقش بزرگی در برطرف‌کردن یا کاهش این بدفهمی‌ها دارد.**

**همچنین با توجه به اینکه نتیجه آزمون تی مستقل، کمتر از 0/05 شد، پس تاثیرگذاری روش تنوع را می توان نتیجه گرفت. درواقع تساوی میانگین‌های دو گروه آزمایش و کنترل رد شده‌اند.**

**در پایان نتیجه می شود که بهره بردن از این نظریه در تدریس و گوشزد کردن بدفهمی ها می تواند نقش مفیدی در یادگیری دانش آموزان داشته باشد و به آن ها کمک می کند تا تضاد ها را رفع کرده و از مفاهیم قبلی به مفاهیم جدید و کامل تر دست یابند. معلمان متوسطه در تدریس فصل اول ریاضی پایه دهم می توانند این بدفهمی ها را در**

کلاس درس بیان کرده و مفاهیم را از جنبه های مختلف مورد سنجش قرار دهند تا یادگیری با دوام تری را در دانش آموزان رقم زنند. انتظار می رود تحقیقات آینده این شیوه را در تدریس مباحث دیگری پیش گیرند و در این زمینه به معلمان و دانش آموزان کمک کنند.

**منابع**


اولسون، متیو،بی.آر. هرگنهان (۱۳۹۷). *مقدمه‌ای بر نظریه‌های یادگیری*، ترجمه علی اکبر سیف، ویراست هشتم. تهران: انتشارات دوران.

حق جو، سعید، ریحانی، ابراهیم (۱۳۹۸). نظریه تنوع و کاربردهای آن در طراحی و اجرای یادگیری پژوهشی در کلاس درس ریاضی. *یازدهمین همایش ملی آموزش*. صص ۱۵۳-۱۳۵.

دری، محمدمهدی. رفیع پور، ابوالفضل (۱۳۹۷). ارزشیابی یک آزمون درباره بدفهمی اعداد گویا با استفاده از مدل راش. *فصلنامه اندازه‌گیری تربیتی*. صص۱۲٦-۱۰۳.

ریحانی، ابراهیم. حمیدی، فریده. راشدی، فرزانه (۱۳۹٤). بررسی درک و فهم دانش‌آموزان از اعداد منفی و بدفهمی‌های آنان. *فناوری آموزش*،صص ٤۱-۲۵.

رادمهر، فرزاد. رحیمیان، حوریه (۱۳۹۹). بررسی اثرات استفاده از نرم‌افزار آموزشی جئوجبرا بر بدفهمی‌های دانش‌آموزان پایه دوم دوره متوسطه در مبحث توابع مثلثاتی. *فناوری آموزش*،صص ۷۷٤-۷٦۵.

شاهی‌فرد، صمد. شعبانی‌فر، صمد (۱۳۹۷). بدفهمی‌های رایج ریاضی دانش‌آموزان ریاضی پایه دهم. *شانزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران*.

Tall, D. (1997). Conflicts and catastrophes in the learning of mathematics. *Mathematical education for teaching*, *2*(4), pp 2-18.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*(2), pp151-169.

پیوست: پرسشنامه

بسمه تعالی

طراح : فاطمه کرامت ، انیس خدارحم پور تاریخ : زمان : ۶۰ دقیقه

دانش آموز عزیز، سوالات را به صورت تشریحی پاسخ داده و پاسخ نهایی را علامت بزنید

آزمون نمره منفی ندارد

۱.کدام عضو زیر وجود دارد؟

۱) بزرگترین عدد گنگ کوچکتر از ۳

۲) کوچکترین عدد صحیح کوچکتر از ۳

۳) بزرگترین عدد گویا کوچکتر از ۳

۴) بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از ۳

۲.کدام یک از عبارت های زیر درست نیست؟

۱) میان هر دو عدد گویا یک عدد گنگ وجود دارد.

۲) میان هر دو عدد صحیح یک عدد گنگ وجود دارد.

۳) میان هر دو عدد صحیح یک عدد طبیعی است.

۴) میان هر دو عدد حقیقی یک عدد گنگ وجود دارد.

۳. کدام یک از گزینه های زیر متناهی است؟

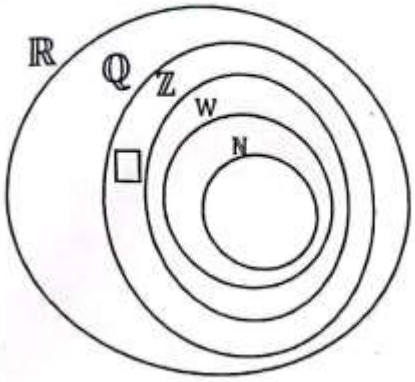
۱) مجموعه مضارب عدد ۵

۲) مجموعه اعداد فرد

۳) مجموعه اعداد زوج

۴) مجموعه اعداد اول ۱۰ رقمی

۵) مجموعه اعداد گنگ




۴. در مربع کدام عدد را نمی توان گذاشت؟

۱) $-۲$ ۳) $\frac{۳}{۲}$

۲) $\sqrt{۵}$ ۴) ۱

۵.کدامیک از گزینه ها نشانگر بازه بسته است؟

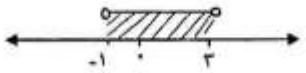
۱) $(-\infty,-۲] \cup [-۴,۹]$

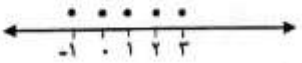
۲) $(-\infty,-۵) \cap (-۷,+\infty)$

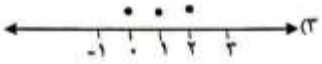
۳) $[-۴,۷) - (۲,۹)$

۴) $[-۲,۴) - [۳,۸)$

۶.نمایش هندسی $\{x \in \mathbb{Z} | -۱ < x < ۳\}$ کدام یک از موارد زیر است؟

۱)



۲)



۳)



۴)



۷. صفر عضو کدام یک از موارد زیر نیست؟

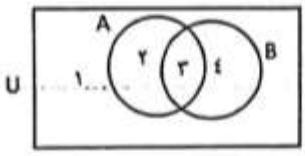
۱) $\emptyset$ ۳) $[۰,+\infty)$

۲) $\{۰\}$ ۴) $\{x \in \mathbb{Z} | -۱ < x \leq ۳\}$

۸.دو مجموعه A و B را در نظر بگیرید. اگر اجتماع آنها ۲۷ عضو و اشتراکشان ۸ عضو داشته باشد، مجموعه ی $(A-B)\cup(B-A)$ چند عضو دارد؟

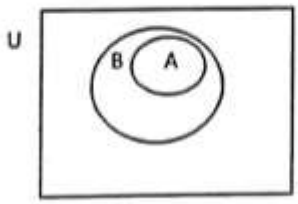
۱) ۱۹ ۲) ۲۱ ۳) ۲۷ ۴) ۳۵

۹. با توجه به شکل مقابل $(A\cap B)'$ با کدام یک از گزینه های زیر برابر است؟




۱) $\{۳,۴\}$ ۲) $\{۲,۳\}$ ۳) $\{۱,۲,۴\}$ ۴) $\{۲,۴\}$

۱۰.با توجه به شکل رو به رو کدام یک از موارد زیر صحیح است؟




۱) $B'\subseteq A'$

۲) $A'\subseteq B'$

۳) $A'=B'$

۴) $A'\cap B'=\emptyset$

۵) $A'\cup B'=U$

۱۱.اگر $U=\{۷,۵,۱۰,۲,۴\}$ و $A=\{۷,۵,۱۰\}$ و $B=\{۱۰,۲,۴\}$ باشد، کدام یک از گزینه های زیر برابر با تهی است؟

۱) $A\cap B$

۲) $A-B$

۳) $(A\cap B)'$

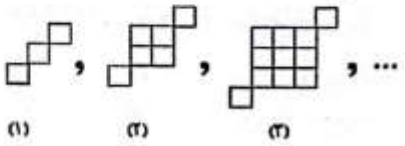
۴) $(A\cup B)'$

۵) $(A\cup B)$

۱۶. جمله هفتم از الگوی اعداد ... ، $\frac{۴}{۱۷}$ ، $\frac{۳}{۱۰}$ ، $\frac{۲}{۵}$ ، $\frac{۱}{۲}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱۴}{۱۰۰}$ ۳) $\frac{۱۵}{۱۰۰}$ ۴) $-\frac{۲}{۱۰}$

۱۷. در الگوی شکل زیر، تعداد قوطی کبریت ها در مرحله یازدهم کدام است؟( □:یک قوطی کبریت)




۱) ۱۲۱ ۲) ۲۱۰ ۳) $۲^{۱۰} \times ۳$ ۴) ۱۲۳

۱۸. کدام یک از موارد زیر یک الگوی خطی است؟

۱) ... ... ۸ ,۱۴,۲۰,۲۶

۲) ... ... ۲, ۵, ۱۰, ۱۷

۳) ... ... ۴,۱۰ ,۱۸,۲۸

۴) ... ... ۵, ۷, ۱۲, ۲۰

۱۹. جمله عمومی الگوی زیر کدام است؟

۵ , ۹, ۱۳, ۱۷ , ۲۱ , ... ... ...

۱) $۴n + ۱$ ۲) $۳n + ۲$

۳) $۴(n + ۱)$ ۴) $n + ۴$

۲۰. جمله ی شانزدهم الگوی زیر کدام است؟

۴ , ۱۱, ۱۸, ۲۵ , ...

۱) ۱۱ ۲) ۱۲۳ ۳) ۱۱۶ ۴) ۱۰۹

به سوال زیر به صورت تشریحی پاسخ دهید.

فرق بین الگو و دنباله چیست؟