

Solving the Problem of Students in Understanding the Concept of Fraction in the Sixth Grade

Mohammad Mirzaei Alavijeh*

**Undergraduate Student of Mathematics Education, Farhangian University,
Isfahan Shahid Bahonar Campus, Iran**

Abstract: Fractions are the most widely used and basic concepts in elementary mathematics, especially sixth grade mathematics, which are of great importance because they are prerequisites for learning other concepts in higher levels of education. In order to solve the problem of sixth grade elementary students in the topic of fractions, the present research first investigated the students' problems in understanding the concept of fractions by considering Behr et al.'s model and then tried to solve their problems by providing solutions. The research method is a qualitative action research, in this research, thirty male students of the sixth grade of Alavijeh city were studied, and then a test was taken from them, taking into account the objectives of the sub-structures related to the understanding of fractions, and the analysis. The data showed that eighty percent of the students understood the concept of fraction in terms of substructure of part to whole and substructure of size, and five six point six percent of them also understood the concept of fraction in terms of substructure of ratio, but only twenty percent of them in terms of substructure outside the part and six point six percent of the students have understood these substructures, so by choosing a new solution and considering the importance of teachers' teaching method, which is considered one of the problems in learning the concept of fraction, from the 5E teaching method was used and then the data analysis showed that with this teaching method, the problem of sixth grade students was solved in two sub-structures outside the part and operator and the students understood these two sub-structures of the concept of fractions. Therefore, the application of this research is that it can improve the knowledge and view of teachers regarding fractions, and according to the investigations, teachers can use the results of the research to solve the problem of students in understanding the concept of fractions in the sixth grade.

Keywords: Action research, Sixth Grade Students, Fraction, 5E Teaching Model

* Corresponding Author, Email: mohamadmirzaei.a79@gmail.com

حل مشکل دانشآموزان در درک مفهوم کسر در پایه ششم ابتدایی

محمد میرزائی علویجه*

دانشجو کارشناسی آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، پردیس شهید باهنر اصفهان، اصفهان، ایران

چکیده: کسرها، پرکاربردترین و اساسی ترین مفاهیم در ریاضیات دوره ابتدایی به ویژه ریاضی پایه ششم هستند که به دلیل پیش نیاز بودن آن برای یادگیری سایر مفاهیم در پایه های بالاتر تحصیلی از اهمیت بالایی برخوردارند. پژوهش حاضر برای حل مشکل دانشآموزان پایه ششم ابتدایی در مبحث کسرها، ابدا مشکلات دانش آموزان در درک مفهوم کسر را با در نظر گرفتن مدل بهر و همکاران مورد بررسی قرار داده و سپس با ارائه راهکارهایی در صدد حل مشکل آنها برآمده است. روش تحقیق، کیفی اقدام پژوهی است که در این پژوهش ۳۰ نفر از دانش آموزان پسر پایه ششم ابتدایی شهر علویجه مورد مطالعه قرار گرفتند و سپس آزمونی با در نظر گرفتن اهداف زیر ساختارهای مربوط به فهم و درک کسرها از آنها گرفته شد و تجزیه و تحلیل داده ها نشان داد که ۸۰ درصد دانش آموزان مفهوم کسر از لحاظ زیر ساختار جزء به کل و زیرساختار اندازه را درک کرده‌اند و ۵۶/۶ درصد آنان نیز مفهوم کسر از لحاظ زیرساختار نسبت را متوجه شده اند ولی در مورد زیرساختار خارج قسمت تنها ۲۰ درصد آنان و در مورد زیرساختار عملگر ۶/۶ درصد دانش آموزان این زیر ساختارها را درک کرده‌اند لذا با انتخاب راه حل جدید و با توجه به اهمیت روش تدریس معلمان که جزء یکی از مشکلات دریادگیری مفهوم کسر به حساب می‌آید از الگوی تدریس ۵۶ استفاده شد و سپس تجزیه و تحلیل داده ها نشان داد که با این روش تدریس مشکل دانش آموزان پایه ششم در دو زیرساختار خارج قسمت و عملگر حل شده و دانش آموزان این دو زیر ساختار از مفهوم کسرها را درک کرده اند. بنابرین کاربرد این پژوهش آن است که می‌تواند شناخت و دید معلمان نسبت به کسرها را کامل تر کند و با توجه به بررسی های صورت گرفته، معلمان می‌توانند نتایج حاصل از پژوهش را برای حل مشکل دانش آموزان در درک مفهوم کسر پایه ششم ابتدایی مورد استفاده قرار دهند.

واژگان کلیدی: اقدام پژوهی، دانش آموزان پایه ششم، کسر، الگوی تدریس ۵۶

اگر مشکلات و بدفهمی ها در سال های اولیه تحصیل و در دوره ابتدایی برطرف نشود منجر به بروز مشکلات در مقاطع تحصیلی بالاتر و در زندگی روزمره خواهد شد (موسی پور، پورتفی کوهنی و تقی پور، ۱۳۹۹) حال یکی از پر کاربرد ترین و اساسی ترین مفاهیم در ریاضیات ابتدایی و به ویژه ریاضی پایه ششم کسرها هستند که یکی از انتزاعی ترین مفاهیم ریاضی دوره ابتدایی به شمار می روند و به دلیل پیش نیاز بودن آن اهمیت بسیاری دارد به طوری که آموزش آن از دوران ابتدایی شروع شده و دانش آموزان تا سال آخر دبیرستان به صورت های گوناگون با آن مواجه هستند.

اما در رابطه با مفهوم کسر آموزشگران ریاضی متعددی همچون کانتربوری^۱، استیوارت، هیول^۲ و هیزمان^۳ بر اینکه مفهوم کسر یکی از دشوارترین مفاهیم مدرسه در همه سطوح تحصیلی است اتفاق نظر دارند (نوروزی، بخشعلی زاده و فربانی، ۱۳۸۹) و همچنین یافته های پژوهشی نشان می دهد که در تمام دوره های تحصیلی بسیاری از دانش آموزان تمایلی به کار کردن با کسر را ندارند و در صورتی که بتوانند ترجیح می دهند با استفاده از روش های طولانی تر مخرج ها را از بین بینند و با عبارت های غیر کسری کار کنند و همچنین یافته ها حاکی از آن است که بیشتر مشکلات دانش آموزان در کار با کسر ها در پایه های متوسطه ، ناشی از عدم درک مفهوم کسر در پایه های ابتدایی و زمان شروع آموزش کسر هاست (موسی پور، پورتفی کوهنی و تقی پور، ۱۳۹۹) که شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا (NCTM) نیز تاکید کرده است، هدف آموزش ریاضی در پایه های سوم تا پنجم باید مرکز روی ساختن درک مفهومی دانش آموزان از مفاهیم دشوار ریاضی مانند کسر ها باشد.

بسیاری از محققان آموزش ریاضی، از عوامل پیچیدگی یاددهی و یادگیری کسرها را ساختار لایه آن می دانند (بهر، لش، پست و سیلور، ۱۹۸۳؛ لامون، ۲۰۰۶) اما از اولین کسانی که موضوع چند لایه بودن کسرها را به میان آورد و مفاهیم متفاوتی (مفاهیم جز به کل، نسبت، عملگر، خارج قسمت و اندازه) را با کسرها مرتبط دانست، کیبرن (۱۹۷۶) بود و بعد از آن مفاهیم مطرح شده توسط کیبرن را بهر و همکاران (۱۹۸۳) ساختار نامیدند و یک مدل نظری مرتبط با زیر ساختارها به همراه مفاهیم ضرب، جمع، هم ارزی کسرها و حل مسئله را برای بررسی درک دانش آموزان از کسر ها پیشنهاد کردند (ریحانی، بخشعلی و دوستی، ۱۳۹۳) که در این مقاله پژوهشی با در نظر گرفتن مدل بهر و همکاران و با استفاده از روش تحقیق کیفی اقدام پژوهی، مشکلات دانش آموزان پایه ششم ابتدایی از مبحث کسرها را مورد بررسی قرار داده و سپس با ارائه راهکارهایی برای حل مشکلات آنها اقدام شده است.

¹ Canterbury

² Hull

³ Hasemann

پیشینه و چارچوب نظری تحقیق

کیرن (۱۹۷۶) معتقد بود که برای فهم و درک کامل و عمیق اعداد کسری لازم است که با زیرساختارها و یا تعابیر آن آشنا شویم. منظور از تعابیر مختلف اعداد کسری معانی متفاوتی است که آن عدد در موقعیت های مختلف یادگیری به خود می گیرد (نقیبی، ۱۳۹۹). پژوهش های کیرن (۱۹۷۶، ۱۹۸۰، ۱۹۸۸) به طور قطع از مهمترین و تاثیرگذارترین مطالعات مرتبط با چارچوب مفهومی تعابیر اعداد گویا بود نه تنها پژوهش های پیش از خود را مورد بررسی و تحلیل قرار داد بلکه زمینه ساز بسیاری از پژوهش های همزمان و یا پس از خود شد و برای اولین بار این ادعا را مطرح کرد که اعداد گویا شامل ساختار های مختلفی هستند و برای فهم این اعداد نیاز است که این ساختار ها به طور کامل و عمیق فهمیده شوند. دیگر محققان مانند بهر و همکاران (۱۹۸۳) چارچوب های عمدتاً موازی با آنچه کیرن در پژوهش های خود ارائه داده بود مطرح کردند و اولsson (۱۹۸۷، ۱۹۸۸) نیز در پژوهش های خود به توسعه این ساختارها پرداخت (نقیبی، ۱۳۹۹).

پژوهش های کیرن

پژوهش کیرن (۱۹۷۶) پایه و مبنای اساسی و مهم برای ارائه تعابیر مختلف اعداد گویا به شمار می رود و ۷ تعبیر ممکن برای اعداد گویا را شناسایی کرد که به برخی از آنها نقدهایی وارد بود که او در مقاله های بعدی فهرست خود را اصلاح می کند. کیرن (۱۹۸۰) از فهرست اول، پنج ایده را به عنوان پایه های ضروری برای ساخت اعداد گویا مشخص می کند که به آنها می پردازیم (نقیبی، ۱۳۹۹).

تعییر جزء به کل

دانش آموزان باید بتوانند یک ناحیه پیوسته یا یک مجموعه گستته را به قسمت ها و نواحی هم اندازه تقسیم کنند به طوری که هیچ کدام از قسمت ها از دیگری بزرگتر یا کوچکتر نباشد و در واقع مفهوم جز به کل مستقیماً از افزای یک کمیت پیوسته و گستته قسمت های هم اندازه حاصل می شود (بهر و همکاران، ۱۹۸۳). مثلا در مدل گستته، کسر $\frac{2}{5}$ توب از ۵ توب و در مدل پیوسته، ۲ برش مساوی از کیک را که به ۵ قسمت مساوی تقسیم شده بود، نشان می دهد. دانش آموزان باید ایده های مرتبط با رابطه بین اجزا و کل را درک کنند و به این فهم و درک برسند که برای ساختن کل، تمام اجزا در نظر گرفته می شود و یا اگر کل به قسمت های بیشتری تقسیم شود، قسمت های کوچکتری به وجود می آید و همچنین با تغییر شکل، مکان و موقعیت، قسمتهای رنگ شده، در رابطه بین جز و کل تغییر ایجاد نمی شود (ریحانی، بخشعلی زاده و دوستی، ۱۳۹۳).

تعییر نسبت

در زیر ساختار نسبت، کسر، رابطه بین دو کمیت هم نوع را نشان می دهد و چون این زیر ساختار یک شاخص مقایسه است و ارتباط بین دو کمیت را بیان می کند بنابراین به عنوان عدد در نظر گرفته نمی شود (ریحانی، بخشعلی زاده و دوستی، ۱۳۹۳).

^۲ مثلاً کسر $\frac{a}{b}$ ، می تواند نسبت های تعداد ۲ ستاره به ۳ دایره را نشان دهد. دانش آموزان نیاز دارند تا ایده مقادیر نسبی را بسازند و بتوانند ارتباط بین دو کمیت را با کسر بیان کنند و با توجه به اینکه در نسبت، دو کمیت با هم تغییر می کنند بنابراین رابطه بین دو کمیت ثابت باقی می ماند و در واقع ویژگی تغییرناپذیری پراکندگی را درک می کنند (ریحانی، بخشعلی زاده و دوستی، ۱۳۹۳).

تعییر عملگر

اگر کسری بر روی اشیا پیوسته اثر کند آنگاه اشیا بزرگتر یا کوچکتر و یا اشیا کوچک تر یا بلند تر می شوند. در زیر ساختار عملگر، کسر به عنوان تابعی در نظر گرفته می شود که روی اعداد، اشیا یا یک مجموعه اعمال می شود (لامون، ۲۰۰۶، بهر و همکاران ۱۹۸۳) معتقدند که عملگر نوعی «تابع تبدیل کننده» است در حقیقت اگر کسر $\frac{a}{b}$ روی یک واحد عمل کند آنگاه آن طول b برابر کوتاهتر و a برابر بزرگتر می شود مثلاً برای طول ۱۰ و عملگر $\frac{a}{b}$ حاصل می شود و به طور مشابه اگر کسر $\frac{a}{b}$ ، روی یک مجموعه n عضوی اعمال شود $b = an$ حاصل می شود و در واقع می توان گفت درک عنوان عملگر تسهیل کننده درک ضرب کسرهاست (ریحانی، بخشعلی زاده و دوستی، ۱۳۹۳) بهر، هارل، پست و لش (۱۹۹۳) بیان می کنند که درک کسرها به عنوان عملگر، درک ضرب کسرها را افزایش می دهد.

تعییر خارج قسمت

^۲ زیرساختار خارج قسمت روی عملیات تقسیم تاکید دارد مثلاً $\frac{a}{b}$ می تواند به عنوان تقسیم ۲ بر ۵ یا نتیجه تقسیم ۲ سیب بین ۵ نفر باشد، در واقع برای تسلط به مفهوم خارج قسمت دانش آموزان نیاز دارند تا کسرها را به عنوان تقسیم اعداد صحیح شناسایی کنند و نقش مقسوم و مقسوم علیه در عملیات تقسیم را به درستی تشخیص دهند (لامون، ۲۰۰۶) و همچنین باید درک کنند که مقسوم، تعداد واحد هاست در حالی که مقسوم علیه تعداد قسمت ها در هر واحد است (ریحانی، بخشعلی زاده و دوستی، ۱۳۹۳).

تعییر اندازه

لامون (۲۰۰۶) زیر ساختار اندازه را به عنوان عدد اختصاص یافته به تعداد یا مقداری از کمیت های قابل اندازه گیری توصیف می کند و در واقع کسر در زیر ساختار اندازه به عنوان عدد معرفی می شود. زیر ساختار اندازه زمانی اتفاق می افتد که واحد اندازه گیری مورد نظر نمی تواند عدد صحیحی را به کمیت اندازه گیری شده اختصاص دهد، در نتیجه نیاز است که واحد به قسمت هایی تقسیم شود و برای بیان مقدار موجود آن کمیت از کسر استفاده می شود (ریحانی، بخشعلی زاده و دوستی، ۱۳۹۳). مثلاً کسر $\frac{a}{b}$ ، می تواند برای میزان مایع درون یک مخزن در نظر گرفته شود.

پژوهش‌های بهر، لش، پست و سیلور

بهر و همکاران (۱۹۸۳) اولین فهرست از تعابیر اعداد گویا کیبرن (۱۹۷۶) را با اندکی تغییر دوباره بازسازی کردند و آن را "زیر ساختار"‌های مفهوم اعداد گویا نامیدند. با الهام از فهرست کیبرن (۱۹۸۰) و توسعه آن بهر و همکاران از میان زیرساختارهای مفهوم اعداد گویا که در بالا معرفی شد نهایتاً پنج زیر ساختار جز_کل، خارج قسمت، نسبت، عملگر و اندازه را به عنوان زیر ساختار های اصلی برای درک اعداد گویا معرفی نمودند و مدل نظریه خود را بر پایه آن بنا نهادند. در این مدل زیر ساختار جز به کل، ساختار اساسی برای توسعه مفهوم اعداد گویا و همچنین نقطه شروع آموزش سایر زیرساختار ها به شمار می‌آید (نقیبی، ۱۳۹۹).

پژوهش‌های فروتنال

فروتنال (۱۹۸۳)، موافق با فهرست کیبرن (۱۹۸۰) رویکرد متفاوتی برای ساختار اعداد گویا معرفی کرد. او کسرها را به عنوان منبع پدیدارشناختی اعداد گویا در نظر گرفت. پدیده شناسی آموزشی، به مجموعه موقعیت هایی گفته می شود که در آن ایده های مهم ریاضی در پدیده های واقعی ظهور پیدا می کند. این موقعیت‌ها بسترهای یادگیری ریاضیات فراهم می کند که در آن ایده های ریاضی با معنا و کاربردی هستند. همچنین فروتنال، سه جانبه از کسرها را که معرف نقش‌های تقسیم کننده، مقایسه گر و عملگر است معرفی کرد که بیشتر به فرآیند و عمل های مرتبط با کسرها اشاره می کند (نقیبی، ۱۳۹۹).

پژوهش‌های اولسون

اولسون (۱۹۸۷) به نقد بررسی فهرست تعابیر و زیر ساختارهای قبل خود پرداخته و نقد اصلی او بیشتر بر این نکته متمرکز بود که برای تعریف و تعیین این تعابیر و زیر ساختارها از ملاک های دقیق و مشخصی استفاده نشده است و معتقد بود در این فهرست برخی از زیر ساختارها از اعداد گویا موجود نیست که باید آن اضافه شود که نقدهایی بر این فهرست وارد شده است (نقیبی، ۱۳۹۹).

اولسون (۱۹۹۸) در پژوهش خود توضیح داد که نماد ایکس و واي (X, Y) متضاظر با لغت معمولی ایکس و واي، مشخص کننده ۴ ساختار ریاضی، یعنی تابع خارج قسمتی، عدد گویا، بردار دوتایی و نوع خاصی از تابع مرکب است که هر یک از این ساختارها خود مشخص کننده کاربردهای آن در موقعیت های مختلف است (نقیبی، ۱۳۹۹).

هم ارزی

وانگ و ایوانس (۲۰۰۷) معتقدند مجموعه هم ارزی مجموعه‌ای از کسرهاست که در آن هر کسر قابل تبدیل به کسری دیگر است. اگر صورت و مخرج یک کسر مضری از صورت و مخرج کسر دیگر باشد این دو کسر، کسرها هم ارز نامیده می‌شوند و به طور کلی می‌توان بیان کرد پیش از آموزش رویه‌های جمع، ضرب و هم ارزی کسرها به دانش آموزان باید درک آنان از مفهوم کسر تقویت گردد. برای درک و توسعه کامل مفهوم کسر نیاز است که دانش آموزان هر یک از زیر ساخت ها را به درستی درک نمایند (ریحانی، بخشعلی زاده و دوستی، ۱۳۹۳).

روش تحقیق

در این مقاله پژوهشی با در نظر گرفتن مدل نظری و با استفاده از روش تحقیق کیفی اقدام پژوهی، درک دانش آموزان پایه ششم ابتدایی از مبحث کسرها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. اقدام پژوهی در آموزش و پرورش، روش علمی حل مسائل و مشکلاتی است که کارورزان با آن در ارتباط هستند و هدف آن بهبود، رفع یا کاهش مشکلات است (قاسمی پویا، ۱۳۸۹). مراحل اقدام پژوهی حاضر، بر اساس مراحل اقدام پژوهی موردنظر قاسمی پویا (۱۳۸۹) صورت می‌پذیرد.

توصیف وضع موجود و بیان مسئله

این پژوهش در مقطع ابتدایی دوره دوم ، دبستان پسرانه شهید محمد علی اسدی در استان اصفهان، شهر علویجه انجام شده است. این مدرسه در سال ۱۳۲۴ تاسیس شده و در سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰ ، تعداد ۱۸۱ دانش آموز دارد که پایه چهارم این مدرسه در دو کلاس با ۶۱ دانش آموز و پایه پنجم این مدرسه در سه کلاس با ۷۰ دانش آموز و پایه ششم این مدرسه در دو کلاس با ۵۰ دانش آموز مشغول به یادگیری و آموزش هستند که در این اقدام پژوهی تعداد دانش آموزان یکی از پایه ششم های این مدرسه (۳۰ نفر) مورد پژوهش و بررسی قرار می گیرند. دبستان پسرانه شهید اسدی جهت تدریس معلمان ، فاقد امکانات آموزشی می باشد و محیط کلاس های این مدرسه کاملا قدیمی و با سقف های طاق و چشمکه ای است. طبق نظرسنجی ها و بررسی های مدیر مدرسه، اکثر والدین دانش آموزان سوادی در حد دیپلم دارند و با روش های جدید حل مسئله در درس ریاضی فرزندشان، آشنا بی کافی ندارند.

گردآوری اطلاعات (شواهد)

الف) مشاهده : با توجه به شرایط تدریس مجازی و بررسی گروه های کلاسی در شبکه اجتماعی دانش آموزان (شاد) و همچنین تدریس حضوری در مدرسه مشاهده کردم که دانش آموزان به خوبی مفهوم کسر را درک نکرده اند و در این زمینه سوالات و ابهامات زیادی دارند.

ب) تشکیل جلسه شورای آموزگاران : برای اطمینان بیشتر از این موضوع با اجازه از مدیر مدرسه در جلسه شورای آموزگاران شرکت کرده و از نظرات ، مشاهدات و تجربیات آنان در تدریس فصل کسرها کمک خواسته و طبق نظر شورای آموزگاران مفهوم کسر با وجود کاربرد بسیاری که در ریاضیات ابتدایی و دوره متوسطه دارد ولی باز هم دانش آموزان در آن دچار مشکلاتی هستند و مفهوم کسر را عمیق درک نکرده اند.

ج) پرسشنامه : برای شناسایی و حل مشکل دانش آموزان پایه ششم در مبحث کسرها سعی شد تا با اهداف مشخص سوالاتی مطرح شود و به عنوان آزمون از دانش آموزان خواسته شد که بدون راهنمایی و کمک دیگران به سوالات آزمون (پرسشنامه) پاسخ دهند که سوالات از این قرار بود.

پرسش : کدام یک از تعریف های زیر از کسر $\frac{3}{4}$ از دیدگاه شما ، صحیح (موافق) و درباره کدام یک از آنها درست یا نادرست بودن آن را نمی دانید (نظری ندارم) و کدام یک از آنها از دیدگاه شما نادرست (مخالفم) است؟

۱) کسر $\frac{3}{5}$ در شکل زیر یعنی: ۳ قسمت از ۵ قسمت شکل رنگ شده است.



الف) موافقم ب) نظری ندارم ج) مخالفم

۲) کسر $\frac{3}{5}$ در شکل زیر یعنی: نسبت مربع ها به دایره ها ۳ به ۵ است.



الف) موافقم ب) نظری ندارم ج) مخالفم

۳) کسر $\frac{3}{5}$ یعنی ۳ پیتزا را بین ۵ نفر تقسیم کنیم.

الف) موافقم ب) نظری ندارم ج) مخالفم

۴) $\frac{3}{5}$ یعنی یک عدد یا شی را ۵ برابر کوچک و ۳ برابر بزرگ کنیم.

الف) موافقم ب) نظری ندارم ج) مخالفم

۵) $\frac{3}{5}$ یعنی مخزنی به حجم ۵ لیتر که ۳ لیتر آن پر از آب است.

الف) موافقم ب) نظری ندارم ج) مخالفم

هدف سوالات ۱ تا ۵ به ترتیب درک مفهوم کسر از لحاظ ساختار جزء به کل، زیر ساختار نسبت، زیر ساختار خارج قسمت، زیر ساختار عملگر و زیرساختار اندازه بوده است.

تجزیه و تحلیل و تفسیر داده ها

از پاسخ های دانش آموزان پایه ششم در مبحث کسرها نتایج و یافته هایی بدست آمد و با بررسی سوال اول که هدف از آن فهم عدد های کسری از لحاظ زیرساختار جزء به کل بود نتایج این چنین حاصل شد که از ۳۰ دانش آموز پایه ششم، ۲۴ نفر به این سوال پاسخ صحیح، ۳ نفر بدون نظر و ۳ دانش آموز مخالف بودند و همانطور که بهر و همکاران (۱۹۸۳) نقطه شروع آموزش کسرها را زیر ساختار جزء به کل به شمار می آورند، طبق نتایج این پژوهش نیز با تحلیل داده ها این نتیجه بدست آمد که ۸۰ درصد دانش آموزان مفهوم کسر را از لحاظ زیرساختار جزء به کل به خوبی درک کرده اند و در این زیرساختار به نحو احسن به پرسش مربوطه پاسخ دادند.

با تحلیل سوال دوم که هدف آن فهم عده های کسری از لحاظ زیر ساختار نسبت بود نتایج این چنین حاصل شد که از ۳۰ دانش آموز، ۱۷ نفر موافق، ۵ نفر بدون نظر و ۸ نفر مخالف بودند یعنی ۵۶/۶ درصد دانش آموزان مفهوم کسر را از لحاظ زیر ساختار نسبت را به خوبی درک کرده اند و تنها ۲۶/۶ درصد آنان با این پرسش مخالف بودند و مفهوم کسر از لحاظ زیر ساختار نسبت را درک نکرده اند.

با تحلیل سوال سوم که هدف آن فهم اعداد کسری از لحاظ زیرساختار خارج قسمت بوده است نتایج بدست آمده چنین بود که از ۳۰ دانش آموز، ۶ نفر موافق، ۶ نفر بدون نظر و ۱۸ نفر مخالف بودند یعنی ۶۰ درصد دانش آموزان که اکثریت کلاس را تشکیل می دهند با مفهوم کسر از لحاظ زیرساختار خارج قسمت هیچ آگاهی و درکی نداشته اند و تنها ۲۰ درصد آنان به این زیرساختار پی برده اند.

با تحلیل سوال چهارم که هدف آن فهم اعداد کسری از لحاظ زیرساختار عملگر بوده است نتایج این چنین حاصل شد که تنها ۲ نفر با این زیرساختار آشنا بوده و ۱۵ نفر بدون نظر و ۱۳ نفر مخالف بودند یعنی ۵۰ درصد دانش آموزان با مفهوم عملگر بدون اطلاع بوده و نظری نداشتند و ۴۳/۳ درصد دانش آموزان مخالفت خود را با این سوال اعلام کردند و تنها ۶/۶ درصد آنان این زیر ساختار را درک کرده اند.

با تحلیل سوال پنجم که هدف آن فهم اعداد کسری از لحاظ زیرساختار اندازه بوده است نتایج این چنین حاصل شد که از ۳۰ دانش آموز پایه ششم، ۲۴ نفر موافق، ۲ نفر بدون نظر و ۴ نفر مخالف بودند یعنی ۸۰ درصد دانش آموزان نسبت به این پرسش و زیرساختار عملگر آگاهی و فهم کافی داشته اند و تنها ۱۳/۳ درصد آنان مخالف بودند.

تجزیه و تحلیل کلی داده ها نتایج این چنین حاصل شد که بیش از نصف دانش آموزان پایه ششم که آخرین پایه تحصیلی دوره ابتدایی به حساب می آید با مفهوم کسر از لحاظ زیرساختارهای جز به کل، نسبت و اندازه آشنایی دارند و به خوبی این مفاهیم و زیر ساختارها را درک کرده اند اما اکثریت آنان با مفهوم کسر از لحاظ زیرساختارهای خارج قسمت و عملگر مخالفت کردند و هنوز مفهوم کسر را از لحاظ این زیر ساختارها درک نکرده اند.

انتخاب راه حل جدید

با توجه به تحلیل داده ها مبنی بر آنکه دانش آموزان در مفهوم کسر از لحاظ سه زیرساختار جزء به کل، نسبت و اندازه مشکلات عده ای ندارند و بیشتر مشکلات آنها مربوط به دو زیر ساختارهای خارج قسمت و عملگر است بنابراین راه حل جدید باید به گونه ای باشد تا مشکل دانش آموزان پایه ششم از مفهوم کسر، با دو زیرساختار خارج قسمت و

عملگر را حل کند اما با توجه به اینکه مطالعات ایزدی و ریحانی (۱۳۹۹) بیان می‌کند، یکی از سه دلیل عمدۀ مشکلات در یادگیری مفهوم کسر، مشکلات ناشی از روش‌های تدریس است لذا به عنوان یکی از روش‌های تدریس ساختن گرایانه می‌توان از الگوی تدریس ۵۶ استفاده نمود.

این روش رویکردی یادگیرنده محور دارد که در آن یادگیرنده مسئولیت یادگیری خود را به وسیله تعامل با مواد آموزشی که سطوح متفاوت دانش و موضوعات یادگیری متنوع را پوشش می‌دهد به عهده می‌گیرد (موسی پور، پور تقی کوهبنه و تقی پور، ۱۳۹۹) در این فرآیند فراغیران به یادگیرنندگانی فعال تبدیل می‌شوند و جریان یادگیری باید یادگیرنندگان را با پردازش آگاهانه و فعال اطلاعات مواجه کند و آن را در تبادل نتایج به دست آمده از این فعالیت‌ها مسئول و پاسخگو به حساب آورد (مالکی، ۱۳۹۲).

الگوی تدریس پنج مرحله‌ای ۵۶ که از روش‌های تدریس یادگیرنده محور ساختن گرایانه است ابتدا توسط کارپلوس و تیر مطرح و سپس توسط بایبی اصلاح شد که این روش آموزشی در ابتدا شامل سه مرحله کاوش، اختراع و کشف بر اساس اصول رشد شناختی پیازه بود و توسط بایبی در جهت ساختن گرایانه تغییر یافت (موسی پور، پور تقی کوهبنه و تقی پور، ۱۳۹۰).

این روش تدریس شامل پنج مرحله به شرح زیر است:

۱. فعال سازی (درگیر کردن): ابتدا معلم به عنوان اجرا کننده آموزش، با ارزیابی دانش پیشین یادگیرنندگان، سعی می‌کند تا با انجام فعالیت جدید، دانش آموزان را با مفاهیم جدید درگیر کند.
۲. اکتشاف: در این مرحله برای دانش آموزان تجرب اکتشافی فراهم می‌شود به گونه‌ای که از دانش قبلی خود استفاده می‌کنند و با استفاده از سوالات اکتشافی و انجام آزمایش به تعمیم دانش قبلی خود می‌پردازند.
۳. توضیح دادن: در این مرحله یادگیرنندگان درک خود را از مفاهیم توضیح می‌دهند و معلم با توضیحات خود می‌تواند یادگیرنندگان را به یادگیری عمیق‌تر راهنمایی کند.
۴. شرح و بسط: یادگیرنندگان به گسترش مفاهیمی که یاد گرفته‌اند می‌پردازند و آموخته‌های خود را به کار می‌گیرند.
۵. ارزشیابی: در این مرحله علاوه بر اینکه یادگیرنندگان خود را ارزیابی می‌کنند معلم نیز پیشرفت یادگیرنندگان را مورد ارزیابی قرار می‌دهد.

مراحل پنجگانه ۵۶ به نوعی است که دانش آموزان را در یادگیری مطالب درسی بیشتر درگیر می‌کند و باعث می‌شود یادگیری عمیق‌تر و پایدارتر صورت گیرد و میزان یادگیری در دانش آموزان افزایش یابد (موسی پور، پور تقی کوهبنه و تقی پور، ۱۳۹۹). اما روش تدریس ۵۶ علاوه بر اینکه یادگیرنندگان را به فعالیت بیشتر، انتقادی و فعال بودن تشویق می‌کند و به یادگیرنندگان اجازه می‌دهد که به جذب و انتقال اطلاعات از طریق حل مسئله و کسب اطلاعات پردازند باعث جلوگیری از حفظ کردن صرف اطلاعات نیز می‌شود (یاسبلاغی راهی و دیگران، ۱۳۹۵).

اجرای راه حل‌ها و نظارت بر آن

۱. فعال سازی (درگیر کردن): همانطور که اشاره شد در این مرحله باید دانسته‌های پیشین دانش آموزان مورد ارزیابی قرار می‌گرفت که از طریق تحلیل پاسخ‌های دانش آموزان به سوالات آزمون (پرسشنامه) میزان درک آنان از مفهوم

کسر مشخص گردید و سپس با انجام فعالیتی مبنی بر آنکه اگر یک عدد طبیعی در عدد کسری کوچکتر از واحد ضرب شود آن عدد کوچکتر میشود یا بزرگتر و آیا می توان به یک میزان آن عدد را کوچک و سپس به یک مقدار مشخصی آن عدد را بزرگ کرد و آیا در بزرگ و کوچک کردن آن عدد طبیعی رابطه با صورت و مخرج کسر می توان پیدا کرد، با فعال نگه داشتن دانش آموزان سعی شد تا ذهن آنان بیشتر درگیر مطلب شود (فعالیت‌هایی که برای درگیر کردن دانش آموزان داده شد می بایست با در نظر گرفتن اهداف و مفاهیم زیر ساختار عملگر باشد). اما در رابطه با مفهوم زیرساختار خارج قسمت نیز با پرسش هایی نظری تقسیم کردن یک پیتنا بین چند نفر یا چند پیتنا بین تعداد مشخصی از افراد و با ایجاد پرسش هایی نظری اینکه چه کسری از پیتنا به آنها تعلق می‌گیرد و آیا میتوان رابطه ای بین تعداد پیتناها، تعداد افراد و صورت و مخرج کسرها پیدا کرد سعی شد تا با در نظر گرفتن اهداف و مفاهیم زیر ساختار خارج قسمت، ذهن دانش آموزان درگیر مطلب کرد.

۲. اکتشاف: دانش آموزان با استفاده از دانش قبلی خود (مفهوم که از لحاظ ساختار جزء به کل، نسبت و اندازه) و تعمیم آن ها و سپس انجام چندین آزمایش و مثال های دیگر همانند آن، تجارت و نکاتی را کشف کردند.

۳. توضیح دادن: دانش آموزان با ایجاد پرسش و فعالیت هایی که معلم در نقش راهنمایی برای آنها ایجاد کرد و با نکاتی که خود دانش آموزان پی برندند لذا درک خود را از مفهوم کسر از لحاظ دو زیرساختار خارج قسمت و عملگر بیان کرده و به توضیح آنچه که به دست آورده بودند پرداختند.

۴. شرح و بسط: دانش آموزان با راهنمایی معلم آنچه را که به دست آورده و آموخته بودن بسط داده و مثال های متنوع دیگری را نیز شرح دادند.

۵. ارزشیابی: در این مرحله علاوه بر مشاهدات صورت گرفته از دانش آموزان توسعه معلم و با استفاده از آزمون هایی از دانش آموزان، آموخته های آنان را مورد ارزیابی قرار داده و دانش آموزان نیز آنچه را که فرا گرفته بودند، مورد ارزیابی قرار دادند.

گردآوری اطلاعات (شواهد ۲)

جهت گردآوری اطلاعات از دانش آموزان، دو پرسش با اهداف زیر ساختار خارج قسمت و عملگر به آنان داده و خواسته شد تا بدون راهنمایی و کمک دیگران، خودشان به تنها بی پاسخ دهنند که سوالات از این قرار بود:

پرسش ۱ : اگر یک کیک را بین ۳ پسر و ۴ کیک را بین ۹ دختر تقسیم کنیم، به دخترها کیک بیشتری می رسد یا پسرها؟ دلیل خود را بنویسد.

هدف از این پرسش درک مفهوم کسر از لحاظ زیر ساختار خارج قسمت است. جدول ۱، پاسخ های دانش آموزان به این پرسش را نشان می دهد.

جدول ۱. پاسخ دانش آموزان به پرسش مربوط به زیر ساختار خارج قسمت

نمونه ای از پاسخ های دانش آموزان	فراوانی	درصد	انواع پاسخ ها
با مقایسه میزان کیکی که به هر نفر می رسد $\frac{4}{9}$ بیشتر از $\frac{1}{3}$ است ، پس به هر دختر کیک بیشتری می رسد (صورت کسر همان تعداد کیک و مخرج کسر $\frac{1}{3} < \frac{4}{9}$ همان تعداد افراد است)		۷۳.۳۳	۲۲ درست
به پسرها بیشتر می رسد چون : $3 \div 1 = 3$ $9 \div 4 = 2.25$		۲۶.۶۶	۸ نادرست

پرسش ۲: مجید ۸۰۰۰ تومان و سعید ۷۰۰۰ تومان دارد. اگر مجید $\frac{3}{4}$ از پول خود و سعید $\frac{8}{10}$ از پولش را خرج کند. چه کسی پول بیشتری خرج گرده است؟ روش خود را بنویسید.
هدف از این پرسش درک مفهوم کسراز لحاظ زیر ساختار عملگر می باشد. جدول ۲) پاسخ های دانش آموزان به این پرسش را نشان می دهد.

جدول ۲. پاسخ دانش آموزان به پرسش مربوط به زیر ساختار عملگر

نمونه ای از پاسخ های دانش آموزان	فراوانی	درصد	انواع پاسخ ها
مجید پول بیشتری از سعید خرج کرده است ، چون: $6000 > 5600$		۶۶/۶	۲۰ درست
$\begin{array}{ c c } \hline 3 & \\ \hline 4 & 8000 \\ \hline \end{array}) = 6000$			
$\begin{array}{ c c } \hline 8 & \\ \hline 10 & 7000 \\ \hline \end{array}) = 5600$			

سعید پول بیشتری را خرج کرده است زیرا:

$$\begin{array}{r} 3 \quad 8 \quad 30 \quad 32 \\ - \quad - \quad - \quad - \\ 4 \quad 40 \quad 40 \quad 40 \end{array} < \frac{\text{چون } 10}{40}$$

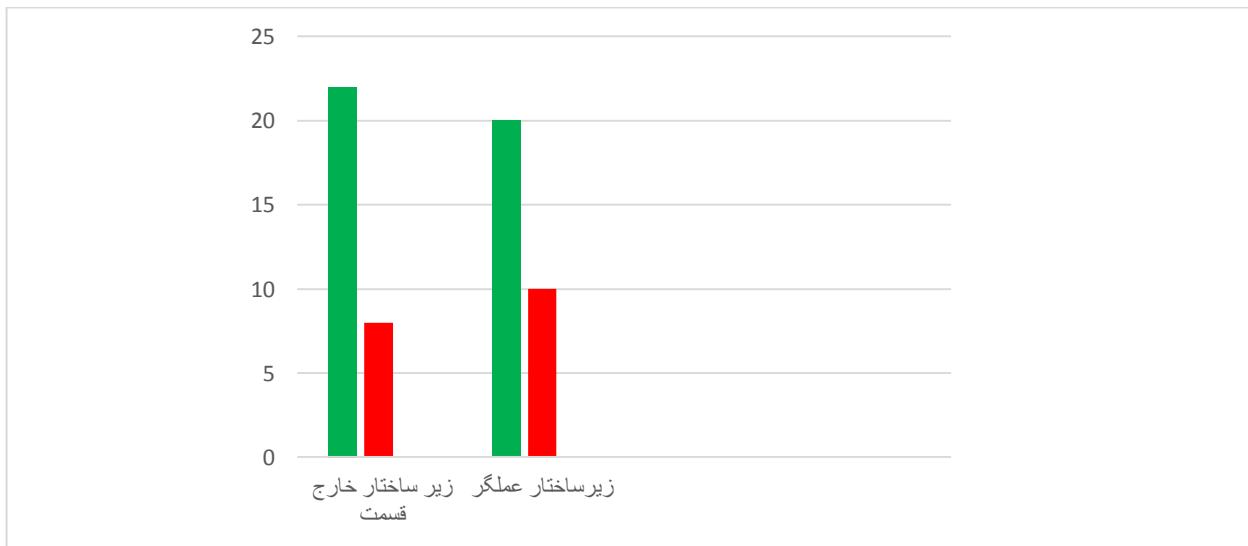
۳۳/۳۳ ۱۰ نادرست

با استفاده از روش تدریس بایی و اجرای دقیق مراحل آن، به مراتب تاثیر این روش بر روی دانش آموزان مشاهده شد بطوریکه اکثر دانش آموزان در انتهای تدریس، به سوالات شفاهی معلم و همچنین به سوالات آزمون به

خوبی پاسخ می دادند و علاوه بر آن حس اعتماد به نفس و خودباوری در آنها مشهود بود زیرا خود دانش آموزان با راهنمایی معلم به پاسخ رسیدند و توانسته بودند مفاهیم را درک کنند و یاموزند.

ارزشیابی تاثیر اقدام جدید

همانگونه که در تجزیه و تحلیل داده ها (مرحله چهارم اقدام پژوهی) مشاهده شد اکثر دانش آموزان در مفهوم کسر از لحاظ زیر ساختار جزء به کل، نسبت و اندازه مشکلی نداشتند و اکثربت آنان در مفهوم کسر از لحاظ زیر ساختار خارج قسمت و عملگر دچار مشکل بودند که با انتخاب راه حل جدید و اجرای آن در کلاس درس و با توجه به اطلاعات به دست آمده (شواهد ۲) مشاهده شد که این روش تدریس و انتخاب راه حل ها توانست مشکل دانش آموزان در مفهوم کسر از لحاظ زیر ساختار خارج قسمت و عملگر را حل کند و اکنون می توان تاثیر اقدامات جدید را در شکل ۱ مشاهده کرد.



شکل ۱. پاسخ های دانش آموزان در دو زیر ساختار خارج قسمت و عملگر

با مقایسه نمودار ۱ و ۲، می توان تأثیر اقدام جدید برای دانش آموزان پایه ششم در دو زیر ساختار خارج قسمت و عملگر را ارزیابی نمود به طوری که قبل از اجرای راه حل و تدریس به الگوی ۵e، اکثر دانش آموزان طبق نمودار ۱، در زیر ساختارهای خارج قسمت و عملگر دچار مشکل بودند ولی با تاثیر اقدامات جدید در نمودار ۲، مشاهده شد که اکثربت آنان به خوبی این دو زیر ساختار را درک کرده اند.

نتیجه گیری

در این پژوهش سعی شد تا ابتدا میزان درک دانش آموزان پایه ششم از کسرها با در نظر گرفتن مدل نظری بهر و همکاران (۱۹۸۳) مورد بررسی قرار گیرد و سپس مشکلات آنها در زیر ساختارها شناسایی شد و با ارائه یک روش تدریس ساختن گرایانه به نام الگوی تدریس ۵e، مشکلات آنها حل شد اما نتایج حاکی از آن است که در مجموع،

دانش آموزان درک متوسطی از کسر ها دارند و نگاه آنان به کسر ها عمدتاً نگاه جزء به کل است که نتایج این پژوهش تا حدودی با نتایج پژوهش کارالامبوس و پتنازی (۲۰۰۷) و ریحانی، بخشعلی زاده و دوستی (۱۳۹۳) همخوانی دارد. نتایج این پژوهش نشان می دهد درک زیر ساختار جز به کل برای درک چهار زیرساختار دیگر لازم و ضروری است اما طبق پژوهش های باتورو (۲۰۰۴) با اینکه درک زیر ساختار جز به کل برای درک مفهوم کسر ها لازم است ولی به تنها یک کافی نیست اما طبق پژوهش های بهر و همکاران (۱۹۸۳) می توان گفت که زیرساختار جز به کل را می توانیم نقطه شروع آموزش کسرها بدانیم که در این پژوهش از این نتایج استفاده شد و با در نظر گرفتن این زیرساختار و پیش نیاز بودن آن ، مشکل دانش آموزان در زیر ساختارهای خارج قسمت و عملگر حل شد.

اما از آنجایی که می توان دلیل مشکل دانش آموزان در مفهوم کسر را به سه دسته کلی (۱) مشکلات ذاتی یادگیری مفهوم، (۲) مشکلات ناشی از روش های تدریس و (۳) ناکافی بودن دانش معلمان برای این مفهوم تقسیم بندی کرد (بهر و همکاران، ۱۹۸۳؛ سون و سنک، ۲۰۱۰؛ امپسون و همکاران، ۱۱؛ دایپ، تورینس، ورمیرج، جانسن و همکاران ۲۰۱۵؛ کاظمی و رفیع پور، ۲۰۱۸؛ آبراستینر و همکاران، ۲۰۱۹). لذا علاوه بر مشکلات عده ای که در مفهوم کسر آن هم به دلیل چند لایه بودن آن وجود دارد که در این پژوهش مشکلات آن حل شد اما مشکلاتی نیز در روش های تدریس معلمان وجود دارد و طبق پژوهش های ایزدی و ریحانی (۱۳۹۹) معلمان از دانش تکلیف ریاضی و دانش محتوایی و عمومی مناسبی درباره مفهوم کسر ها برخوردار نیستند در صورتی که یکی از وظایف معلمان توسعه درک مفهومی دانش آموزان از مفاهیم ریاضی است (ريحانی، بخشعلی زاده و دوستی، ۱۳۹۳) لذا با توجه به اینکه یکی از کاربردهای این پژوهش کمک به معلمان برای حل مشکل دانش آموزان در درک مفهوم کسر است، بنابرین به معلمان توصیه می شود که در آموزش مفهوم کسر، دانش محتوایی عمومی خود را در این زمینه ارتقا دهند و با زیر ساختارهای کسر آشنا شده و از تفاوت های زیر ساختارها آگاهی یابند و به همه زیرساختارهای مفهوم کسر نگاهی متوازن داشته باشند.

منابع

- ایزدی، مهدی و ریحانی، ابراهیم (۱۳۹۹). استفاده از یک تکلیف غیر معمول برای بررسی دانش تکلیف ریاضی و دانش محتوایی عمومی معلمان دوره ابتدایی استان تهران از مفهوم کسر. *فصلنامه علمی پژوهش در یادگیری آموزشگاهی و مجازی ، سال هفتم ، شماره چهارم (پیاپی ۲۸) ، بهار ، ص ص ۵۵-۷۰.*
- ريحانی، ابراهیم، بخشعلی زاده، شهرناز و دوستی، مليحه (۱۳۹۳). درک مفهوم کسر توسط دانش آموزان پایه ششم دوره ابتدایی. *فصلنامه مطالعات برنامه درسی، دوره نهم، شماره ۳۴.*
- قاسمی پویا، اقبال (۱۳۸۹). راهنمای معلمان پژوهنده، پژوهشکده تعلیم و تربیت ، چاپ پنجم.
- کاظمی، فرهاد، رفع پور، ابوالفضل و فدایی، محمدرضا (۱۳۹۸). بررسی دانش محتوا و دانش پدagogی محتوای معلمان ابتدایی و ارتباط آن با توانایی حل مسائل کسرهای ریاضی دانش آموزان. *فصلنامه پژوهش در برنامه درسی، (۳۳)، ۲، ۱۰۴-۱۲۰.*

مالکی، مائدہ (۱۳۹۲). تاثیر الگوی طراحی آموزشی گانیه و پنج مرحله ای بایبی در آموزش مبتنی بر شبکه بر انگیزش پیشرفت تحصیلی دانش آموزان . فصلنامه پژوهش و برنامه ریزی در آموزش عالی : شماره ۷۰، ص ص ۹۹-۱۱۶.

موسی پور، منصوره، پور تقی کوهبنه، بهاره و تقی پور، آمنه (۱۳۹۹). بررسی بدفهمی های موجود در مبحث کسر ریاضی دوره ابتدایی و راهکارهایی برای رفع آن ها. فصلنامه پویش در آموزش علوم پایه، دوره ششم، شماره ۲۰، نقیبی، مهدخت (۱۳۹۹) . بررسی و تحلیل چارچوب های نظری تعابیر مفهوم اعداد گویا. پژوهش در آموزش ریاضی، دوره ۱، شماره ۲ ، ص ص ۱۳-۲۶.

نوروزی لرکی، فرزان، بخشعلی زاده، شهرناز و قربانی سی سخت، زینب (۱۳۸۹). بازنمایی های چندگانه : فرآیندی مهم در یاددهی و یادگیری کسرها . نشریه علمی پژوهشی فناوری آموزش . سال پنجم ، جلد ۵ ، شماره ۱، ص ص ۱۳-۲۳.

یاسبلاغی شراهی، بهمن، زارع، محمد و ساریخانی، راحله (۱۳۹۵). تاثیرروش تدریس بایبی بر میزان یادگیری و یادداشتی درس مقاهمی پایه دانشجویان رشته پرستاری. آموزش پرستاری : دوره پنجم ، شماره ۱، ص ص ۳۰-۳۷.

Baturo, A. R. (2004). Empowering Andrea to help year 5 students construct fraction understanding. Proceedings of the 28th PME Conference, Vol. 2, Bergen University College, Bergen, pp. 95–102.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. (1983). ‘Rational number concepts’, in R. Lesh and M. Landau (eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes, Academic Press, New York, pp. 91–125.

Behr, M.J., Harel, G., Post, T. and Lesh, R. (1993). Rational numbers: Toward a semantic analysis-emphasis on the operator construct , in T.P. Carpenter, E. Fennema and T.A. Romberg (eds.), Rational Numbers: An Integration of Research, Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey, pp. 13–47.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. Educational Studies in Mathematics, 64, 293-316.

Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., et al. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. Teaching and Teacher Education, 47, 82-92.

Empson, S. B., Levi, L., & Carpenter, T. P. (2011). The algebraic nature of fractions: Developing relational thinking in elementary school. In Early algebraization (pp. 409-428). Springer, Berlin, Heidelberg.

Kazemi, F., & Rafiepour, A. (2018). Developing a Scale to Measure Content Knowledge and Pedagogy Content Knowledge of In-Service Elementary Teachers on Fractions. International Journal of Science and Mathematics Education, 16(4), 737-7.

Kieren, T.E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers, in R. Lesh (ed.), Number and Measurement: Papers from a Research Workshop ERIC/SMEAC, Columbus, OH, pp. 101–144.

Lamon, S.J. (2006). Teaching Fractions and Ratios for Understanding. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Obersteiner, A., Dresler, T., Bieck, S. M., & Moeller, K. (2019). Understanding fractions: integrating results from mathematics education, cognitive psychology, and neuroscience. In Constructing Number (pp. 135-162). Springer, Cham.

Son, J. W., & Senk, S. L. (2010). How reform curricula in the USA and Korea present multiplication and division of fractions.