Research in Mathematics Education **http://rme.cfu.ac.ir**
Vol. 1, No. 2, Winter 2021
pp.13-26

Study and Analysis of Theoretical Frameworks of Interpretations of the Rational Numbers Concept

Mahdokht Naghibi*

Department of Mathematics Education, Farhangian University, Tehran, Iran

Abstract: The different terms and interpretations representing rational numbers are one of the problems of using said numbers in learning situations. Researchers agree that fully understanding rational numbers depends on gaining an understanding of their interpretations and subconstructs. In the last three decades, researchers have tried to present a list of fundamental interpretations of this concept with different approaches. A number of these studies are complementary to previous research which encourages motivation and challenge in the domain of conceptual development and a tendency toward it. The diversity of interpretations and their undefined inter-relations presented in these studies, are one of the predominant factors contributing to the complexities of rational numbers. This analytical review article aims to clarify the construct of rational numbers and render it more understandable. It examines and critiques the effective research done from 1976 to 1993 on the topic of the theoretical framework of interpretations and subconstructs of rational number concept. In addition to analyzing the inter-relations of subconstructs of one list, if possible, this study critiques similarities and distinctions among different lists.

Keywords: Theoretical Framework of Rational Number, Fraction Concept, Interpretation of Rational Number, Subconstructs of Rational Number

* Corresponding Author, Email: mahdokhtnb@yahoo.com

پژوهش در آموزش ریاضی
دوره ۱، شماره ۲، زمستان ۹۹
صفحات ۲۶-۱۳
http://rme.cfu.ac.ir

بررسی و تحلیل چارچوب‌های نظری تعابیر مفهوم اعداد گویا

مهدخت نقیبی *

گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران ، ایران

چکیده: یکی از مشکلات به کارگیری اعداد گویا در موقعیت‌های یادگیری، اصطلاحات، تعابیر و زیرساختارهای متعددی است که برای بیان آن وجود دارد. محققان بر این باورند که درک همه جانبه و عمیق از ساختار اعداد گویا، بستگی به درک این تعابیر و زیرساختارها دارد. به همین منظور در سه دهه اخیر، تعدادی از محققان در مطالعاتی، بعضا با رویکردهای متفاوت، سعی در ارائه فهرستی از تعابیر و زیرساختارهای اساسی و ضروری از این مفهوم کردند. برخی از این پژوهش‌ها، تکمیل کننده پژوهش‌های قبلی و یا پژوهش های همزمان خود بودند که در دوران خود باعث ایجاد انگیزه و رقابت در حوزه توسعه مفهومی و گرایش به سمت آن در میان محققان آموزش ریاضی شدند. تنوع معانی و تعابیر ارائه شده در این مطالعات و همچنین ارتباط نامعلوم بین آن ها، خود یکی از عوامل پیچیدگی مفهوم اعداد گویا به شمار می‌رود. مقاله پیش رو از نوع تحلیلی مرروی است که با هدف شفاف‌سازی و کمک به درک دقیق ساختارهای اعداد گویا، به بررسی و نقد پژوهش‌های تاثیرگذار در این زمینه، که عمدتا در فاصله زمانی ۱۹۷۶ تا ۱۹۹۳ ارائه شدند می‌پردازد. این تحقیق، با توجه به مبانی نظری توسعه مفهومی، علاوه بر بررسی ارتباط میان زیر ساختارها یک فهرست (در صورت امکان)، شباهت ها و تفاوت‌های موجود میان فهرست‌های متفاوت را نیز مورد نقد و تحلیل قرار می‌دهد.

واژگان کلیدی: چارچوب نظری اعداد گویا، مفهوم کسر، تعابیر اعداد گویا، زیرساختارهای اعداد گویا

* نویسنده مسئول، رایانامه: mahdokhtnb@yahoo.com

مقدمه

مفهوم «کسرها» و به طور کلی تر اعداد گویا از دیر باز، یکی از مفاهیم مهم، جالب و در عین حال چالش برانگیز ریاضیات مدرسه ای برای یاددهی-یادگیری و همچنین پژوهش به شمار می‌رود. منظور از اعداد گویا در این مقاله، تمامی اعدادی هستند که با نماد $\frac{a}{b}$ نمایش داده می‌شوند که در آن، a و b دو عدد صحیح و b غیر صفر است. این مفهوم به طور گسترده‌ای، سال‌های دوره ابتدایی و متوسطه را در بر می‌گیرد. محققان بسیاری به بررسی مشکلات متفاوت و متنوع در ارتباط با یادگیری و تدریس این مفهوم پرداخته‌اند. جدا از مشکلاتی از قبیل ماهیت ترکیبی وپیچیده آن[۱] (هارت[۲]، ۱۹۸۱) و یا مشکلات مرتبط به گذر از مجموعه اعداد حسابی به اعداد گویا به عنوان منبع ارجاع، یکی از مشکلات مهم در ارتباط با این مفهوم، استفاده از اصلاحات و تعابیر مختلف و مبهمی است که برای بیان آن به کار برده می‌شود (اولسون[۳]، ۱۹۸۸).

نمونه ای از آن، تعاریف یا شبه تعریف هایی است که ممکن است متناقض به نظر آیند: مثلا اغلب بین *کسرها* و *اعداد اعشاری* تفاوت قائل می‌شویم، ولی مگر نه این که یک کسر مثل $\frac{۳}{۱۰}$ خود عددی اعشاری به شمار می‌رود؟

کیِرن (۱۹۷٦) معتقد بود که برای فهم و درک کامل و عمیق *اعداد گویا* لازم است با *زیر ساختارهای* یا *تعابیر* آن آشنا شویم. منظور از *تعبیرهای* مختلف عدد گویا، معانی متفاوتی است که آن عدد در موقعیت های مختلف یادگیری به خود می‌گیرد. مسلما برای اعداد گویا و کسرها تعریف های دقیق ریاضی موجود است. ولی این اعداد از دیدگاه پداگوژی، تعابیر و معانی متفاوتی را در موقعیت‌های مختلف یادگیری، شامل می‌شوند. مثلا $\frac{۲}{۳}$ می‌تواند جواب هر سه مسئله زیر، با سه تعبیر مختلف باشد:

- **یک پیتزا به سه قسمت مساوی تقسیم شده و دو قسمت آن خورده شده، چه کسری از کل پیتزا خورده شده است؟ (تعبیر جزکل)**
- **دو پیتزا را می خواهیم بین ۳ نفر به طور مساوی تقسیم کنیم، سهم هر نفر چقدر از پیتزا است؟ (تعبیر خارج قسمت)**
- **اگر تعداد افراد ۳ نفر وتعداد پیتزاها ۲ باشد، نسبت تعداد پیتزا به تعداد افراد چقدر است؟ (تعبیر نسبت)**

در این مثال ها، کسر $\frac{۲}{۳}$ تغییر نمی‌کند بلکه شرایط و موقعیت‌های فیزیکی مرتبط با این کسر تغییر می‌کند. به عبارتی تعابیر این موقعیت‌ها با هم متفاوت است.

این موضوع، مورد توجه پژوهشگران آموزش ریاضی در یک برحه زمانی خاص (حدودا بین سال های ۱۹۷٦ تا ۱۹۹۳) قرار گرفت. آن‌ها تلاش کردند با بیان و تعریف زیر ساختارها و تعابیر مختلف اعداد گویا در قالب یک چارچوب نظری، به درک و فهم عمیق این اعداد کمک کنند (کیِرن (۱۹۸۸، ۱۹۸۰، ۱۹۷٦)، بِر و همکاران (۱۹۸۳، ۱۹۹۲، ۱۹۹۳)، نِشِر (۱۹۸۵)، فرودنتال (۱۹۸۳)، اولسون (۱۹۸۷)، ورنیو (۱۹۸۳، ۱۹۸۸).

---

[۱] به طور ظاهری، هر عدد کسری شامل دو عدد و یک نماد خط کسری است.

[2] Hart
[3] Ohlsson

هرچند چارچوب‌های مهم نظری دیگری، مرتبط با جنبه های دیگری از اعداد گویا موجودند (مثل میدان مفهومی ضربی[4] (ورنیو (۱۹۸۸ و ۱۹۸۳)، اکتساب و سازمان‌دهی دانش اعداد گویا (کیبرن، ۱۹۸۸ و پیری[5]، ۱۹۸۸)، جنبه‌های معنایی از کمیت‌ها (شوارتز[6] ۱۹۸۸، کَپُت[7] ۱۹۸۵)، تاثیر دانش شهودی در توسعه اعداد گویا (رسنیک[8] ، ۱۹۸٦ ، مَک[9] ، ۱۹۹۵ و۱۹۹۰) و ریاضیات واقعیت مدار (استریفلّند[10] ، ۱۹۹۱ و ۱۹۹۳) که ماهیت متفاوتی با موضوع مورد بحث در این مقاله دارند و علاقه‌مندان می‌توانند در پژوهش‌های خود به این جنبه‌ها از اعداد گویا نیز توجه کنند ولی تاکید این مقاله بر پژوهش‌هایی است که چارچوب‌های نظری مرتبط با تعابیر اعداد گویا ارائه داده‌اند.

در پژوهش‌هایی متمرکز بر تعابیر اعداد گویا ، گاها چارچوب مفهومی با دیدگاه‌های متفاوتی ارائه و از اصطلاحات مختلف و در برخی موارد معادلی چون تعبیر[11]، ساختار و زیر ساختار[12]، جنبه[13] و کاربرد[14] برای معانی مختلف اعداد گویا استفاده شده است. همچنینن فهرست این تعابیر و زیرساختارها غالبا با هم متفاوت است. همان طور که اشاره شد، یکی از عوامل مهم پیچیدگی این مفهوم، همین معانی و تعابیر متعدد و مبهم و ارتباط بین آن‌هاست (اولسون[15]، ۱۹۸۸، بروسو[16] و همکاران، ۲۰۰٤ ، کیِیرن[17]، ۱۹۹۳، لامون[18]، ۱۹۹۹، ۲۰۰٦). بنابراین فهم و بررسی چارچوب نظری اعداد گویا، بنا به تنوع اصطلاحات کاربرده شده و تعابیر مختلف، ممکن است گیج کننده و مبهم باشد.

لذا هدف این مقاله، شفاف‌سازی و کمک به درک دقیق ساختارهای نظری اعداد گویا در پژوهش‌های مهم و تاثیرگذار از طریق بررسی دقیق تعابیر و اصلاحات مختلف و همچنین تحلیل و مقایسه آن‌ها، با تاکید بر درک شباهت‌ها و تفاوت ها، است.

نوع و روش پژوهش

این مقاله از نوع تحلیلی- مروری است که بر تلاش‌ها و پژوهش‌های مهم و تاثیر گذار مرتبط با تعابیر و زیرساختارهای اعداد گویا که در فاصله زمانی خاص (بین سال‌های ۱۹۷٦ تا ۱۹۹۳) انجام گرفتند متمرکز است.

این پژوهش‌ها عبارت هستند از:

- پژوهش‌های کیِیرن (۱۹۷٦، ۱۹۸۰، ۱۹۸۸)
- پژوهش‌های بِر، پست[19]، سیلور[20]، هارِل[21] ، لِش[22] (۱۹۸۳، ۱۹۹۳)

---

[4] Multiplicative conceptual field
[5] Pirie
[6] Schwartz
[7] Kaput
[8] Resnick
[9] Mack
[10] Streefland
[11] Interpretation
[12] Construct, subconstruct
[13] Aspect
[14] Application
[15] Ohlsson
[16] Brousseau
[17] Kieren
[18] Lamon
[19] Post
[20] Silver
[21] Harel
[22] Lesh

- پژوهش‌های فرودنتال (۱۹۸۳)
- پژوهش‌ها اولسون (۱۹۸۷)

برای انجام این کار، پژوهش‌های مرتبط دیگری با موضوع خاص مورد بحث، از طریق مطالعه دانشنامه و کتاب‌های مرجع در آموزش ریاضی، بانک‌های اطلاعاتی (مثل Eric)، موتور جستجوی گوگل و مقالاتی که توسط نگارنده، قبلا گردآوری شده بودند انتخاب شدند. معیار انتخاب مقالات، بر اساس اهمیت و تاثیرگذاری آن‌ها و تعداد ارجاعاتی بود که دیگر مقالات به آن داده بودند. تحلیل و نقد هر یک از پژوهش‌ها با توجه به مبانی نظری توسعه مفهومی، و مقایسه آن ها با تاکید بر شباهت‌ها و تفاوت‌ها انجام گرفت.

چارچوب‌های نظری تعابیر مفهومی اعداد گویا

بسیاری از محققان در صدد شناسایی و یافتن تعابیر مختلف اعداد گویا برآمدند تا بتوانند به شفاف سازی ابهامی که در استفاده از اصطلاحات متفاوت این مفهوم وجود دارد کمک کنند. همان طور که اشاره شد، منظور از تعابیر، معانی متفاوت اعداد گویا در موقعیت‌هایی مختلف یادگیری است.

پژوهش‌های کیِیرن (۱۹۷۶، ۱۹۸۰، ۱۹۸۸)، به طور قطع از مهم‌ترین و تاثیرگذارترین مطالعات مرتبط با چارچوب مفهومی تعابیر اعداد گویا بود. او نه تنها پژوهش‌های پیش از خود را مورد بررسی و تحلیل و قرار داد بلکه زمینه ساز بسیاری از پژوهش‌ها همزمان و یا پس از خود شد. اولین بار او این ادعا را مطرح کرد که اعداد گویا شامل ساختارهای مختلفی است و برای فهم این اعداد نیاز است که این ساختارها به طور کامل و عمیق فهمیده شوند. دیگر محققان مثل بِر و همکاران (۱۹۸۳، ۱۹۹۳) ، و فرودنتال (۱۹۸۳)، چارچوب‌هایی عمدتا موازی با آن چه کییرن در پژوهش های خود ارائه داده بود مطرح کردند. اولسون (۱۹۸۷ ، ۱۹۸۸) در پژوهش‌های خود به توسعه این ساختارها پرداخت و فهرستی مبسوط‌تر از زیر ساختارهای این اعداد ارائه داد.

در ادامه، به بیان، بررسی وتحلیل هر یک از این پژوهش ها و ارتباط آن‌ها با هم می‌پردازیم.

پژوهش‌های کیِیرن

پژوهش‌های کیِیرن (۱۹۷٦) پایه و مبنای اساسی و مهم برای ارائه تعابیر مختلف برای اعداد گویا به شمار می‌رود. او این ایده را بیان کرد که اعداد گویا به روش‌های متفاوتی می تواند تعبیر شود و درک این مفهوم وابسته به درک واضح و روشن هر یک از این تعبیرها دارد. او هفت تعبیر ممکن برای اعداد گویا شناسایی کرد:

۱- اعداد گویا کسرهایی هستند که می توانند با هم مقایسه، جمع و تفریق و ... شوند؛

۲- اعداد گویا، اعداد اعشاری هستند که گسترش طبیعی اعداد صحیح به شما می‌روند؛

۳- اعداد گویا، دسته‌های هم ارزی از کسرها هستند، بنابراین $\{\ldots, \frac{۲}{٤}, \frac{۱}{۲}\}$ و $\{\ldots, \frac{٤}{٦}, \frac{۲}{۳}\}$ اعداد گویا حساب می‌شوند؛

٤- اعداد گویا اعدادی به صورت $\frac{p}{q}$ هستند که p و q اعداد صحیح و $q \neq 0$. در این حالت اعداد گویا نسبت ها را بیان می‌کنند؛

۵-اعداد گویا عملگرهای ضربی هستند؛

٦- اعداد گویا عناصر میدان نامتناهی خارج قسمت های مرتب شده هستندکه به صورت $x = \frac{p}{q}$ نمایش داده می‌شوند و در معادله $q \times x = p$ صدق می‌کنند؛

۷- اعداد گویا اندازه‌هایی روی محور اعداد هستند.

این اولین فهرستی بود که کیِرن به عنوان تعبیرهایی از اعداد گویا ارائه داد. به تعدادی از این تعبیرها نقدهایی وارد است. مثلا در تعبیر سوم که اعداد گویا به عنوان دسته‌های هم ارزی از کسرها معرفی می‌شود این شبهه به وجود می‌اید که کسرها می‌توانند مستقل از اعداد گویا تعریف شود که این با تعبیر اول که اعداد گویا را کسر تعریف می‌کند در تناقض است. یا مثلا در آخرین تعبیر به نظر می‌آید مفهوم اندازه گیری به مفهوم نقاط روی محور اعداد محدود شده است.

کیِرن در در مقاله های بعدی سعی در می‌کند فهرست خود را اصلاح کند. کیِرن (۱۹۸۰) از فهرست اول، پنج ایده را به عنوان پایه های ضروری برای ساخت اعداد گویا مشخص می‌کند:

جزء-کل، نسبت، خارج قسمت، اندازه‌گیری و عملگر

پیش از نقد و تحلیل این فهرست و مقایسه آن با دیگر فهرست‌ها، به تعریف و بررسی دقیق‌تر هر یک از این تعابیر می‌پردازیم:

تعبیر جزء- کل:

ایدهٔ اصلی این تعبیر، تقسیم یک کل به چند قسمت (جزء) مساوی و سپس انتخاب تعدادی از این قسمت‌ها (جزء‌ها) است. کسر به تعبیر جزء-کل عددی است که ارتباط میان جزء و کل را بیان می‌کند صورت این کسر تعداد اجزای انتخاب شده و مخرج آن تعداد کل جزءها است. کل ممکن است کمیت پیوسته و یا گسسته‌ای باشد.

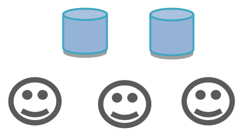
به عنوان مثال، $\frac{۲}{۳}$ به این تعبیر، تقسیم یک پیتزا به ۳ قسمت مساوی و انتخاب ۲ قسمت از آن و یا یعنی تقسیم مجموعه تیله ها به ۳ زیر دسته مساوی و سپس انتخاب ۲ زیر دسته از آن است (تصویر ۱).

تصویر ۱. نمایش کسر $\frac{۲}{۳}$ به تعبیر جزء-کل با مدل گسسته و پیوسته

تعبیر نسبت:

ایدهٔ اصلی این تعبیر، مقایسهٔ دو مقدار به‌وسیلهٔ یک نسبت است. کسر به تعبیر نسبت عددی است که ارتباط میان دو مقدار را نشان می دهد. صورت این کسر یکی از این دو مقدار و مخرج کسر مقدار دیگر است. دو مقدار در یک نسبت می توانند از یک جنس، یا از دو جنس متفاوت باشند.

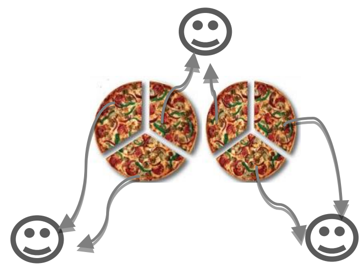
مثلا در تصویر ۲، نسبت تعداد صندلی‌ها به تعداد دانش‌آموزان ، ۲ به ۳ یا $\frac{۲}{۳}$ است.



تصویر ۲. نمایش کسر $\frac{۲}{۳}$ به تعبیر نسبت

تعبیر خارج قسمت:

ایدهٔ اصلی این تعبیر، تقسیم مساوی یک مقدار بین چند دسته است. کسر به تعبیر خارج قسمت، عددی است که سهم هر دسته را در این تقسیم نشان می‌دهد. صورت این کسر، مقدار اولیه و مخرج آن تعداد دسته‌ها است. در تصویر ۳، دو پیتزا بین سه نفر به طور مساوی تقسیم شده و سهم هر نفر $\frac{۲}{۳}$ یک پیتزا شده است.

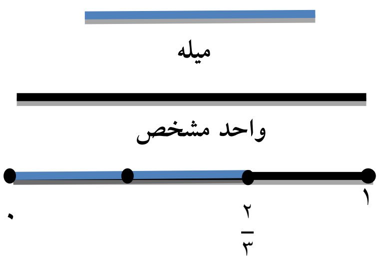


تصویر ۳. نمایش کسر $\frac{۲}{۳}$ به تعبیر خارج قسمت

تعبیر اندازه‌گیری:

ایده اصلی این تعبیر، تعیین اندازه یک کمیت با توجه به یک واحد مشخص است. کسر به تعبیر اندازه‌گیری، عددی است که اندازه کمیت را نسبت به واحد تعیین شده، به دست می‌دهد. برای تعیین دقیق‌تر کمیت، واحد اندازه گیری به زیرواحدها تبدیل می‌شود.

مثلا در تصویر ٤، بزرگی طول میله آبی، نسبت به واحد داده شده، اندازه گرفته می‌شود. طول آن $\frac{۲}{۳}$ واحد است.



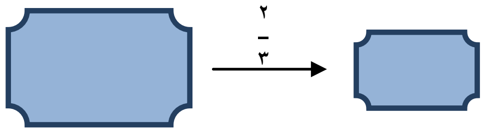
تصویر ٤. نمایش کسر $\frac{۲}{۳}$ به تعبیر اندازه‌گیری

در تعبیر اندازه‌گیری، کسرها همچنین به عنوان عدد روی محور اعداد معرفی می‌شوند.

تعبیر عملگر:

در این تعبیر، کسر $\frac{a}{b}$ تابعی (تبدیلی) است که روی یک عدد، یک مجموعه و یا اشیاء اثر می‌کند و آن را b برابرکوچک (کم) و a برابر بزرگ (زیاد) می‌کند. این دو عمل پشت هم یعنی «تقسیم یک مقدار بر یک عدد صحیح (غیر صفر)» و سپس «ضرب حاصل این تقسیم در عددی صحیح» را می‌توان با یک عملگر یک مرحله‌ای ضربی به شکل کسر نشان داد. صورت این کسر، عددی است که ضرب شده و مخرج آن، عددی است که بر آن تقسیم شده است.

مثلا در تصویر ۵، کسر $\frac{۲}{۳}$ روی تصویر A اثر می کند و تصویر B حاصل می‌شود.



شکل ۵. نمایش کسر $\frac{۲}{۳}$ به تعبیر عملگر

یا $\frac{۲}{۳}$ از یک جمعیت ۳۰۰ نفری در یک محله، ۲۰۰ نفر خواهد بود.

کیبرن با بازنگری فهرست قدیمی (۱۹۷۶)، تغییراتی در فهرست جدید خود (۱۹۸۰) پدید آورد: او تعبیر جز کل را به فهرست قبلی خود افزود و تعابیر دیگر را اصلاح کرد. در این فهرست، ایده اندازه‌گیری محدود به «نقاط روی محور اعداد» جای خود را به ایده کلی تری یعنی شمارش واحدهای استفاده شده برای پوشاندن یک ناحیه و تقسیم این واحدها به زیرواحدها برای ارزیابی دقیق‌تر بزرگای موردنظر داد. هرچند که این تعبیر ارتباط تنگاتنگی با ایده *جز-کل* دارد، اما کیبرن به این نکته اشاره کرد که در تعبیر *اندازه‌گیری*، تاکید به طور خاص بر مشخصه دلخواه واحد اندازه‌گیری و زیرواحدهای آن است و ایده *جزکل* تنها به طور ضمنی مطرح است. او در این فهرست، تفاوت بین دو تعبیر *جز کل* و نسبت را این گونه شرح می‌دهد:

> «ایده *جز کل* به طور ضمنی در تعبیر *نسبت نیز* وجود دارد ولی این دو تعبیر در رابطه‌ای که بین صورت و مخرج وجود دارد متفاوت هستند. در تعبیر *جزء کل*، رابطه بین یک قسمت و کل وجود دارد در حالی که در تعبیر *نسبت*، رابطه بین دو قسمت (از یک کل یا دو کل متفاوت) وجود دارد».

مشخصه ضمنی رابطه *جزء کل* که به نوعی در دیگر تعبیرها یافت می‌شود کیبرن را در سال ۱۹۸۸ متقاعد ساخت تا تنها چهار تعبیر اساسی *اندازه‌گیری، خارج قسمت، نسبت و عملگرضربی* را معرفی کند که هر یک با تعبیر جز کل مرتبط است.

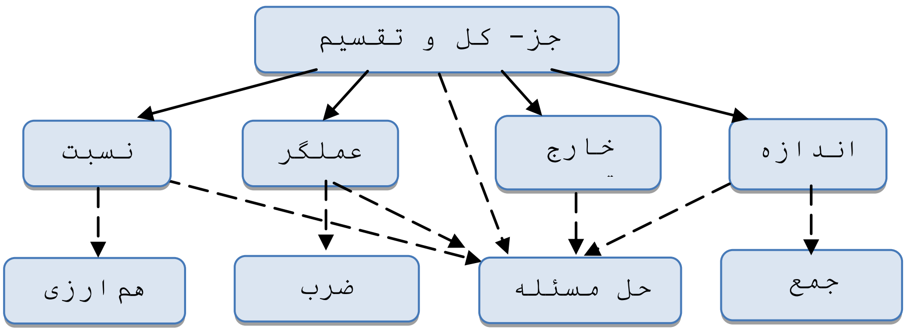
پژوهش‌های بِر، لِش، پُست و سیلور

بر و همکاران (۱۹۸۳) اولین فهرست از تعابیر اعداد گویای کیبرن(۱۹۷۶) را با اندکی تغییر، دوباره بازسازی کردند و آن را «زیر ساختار» های مفهوم اعداد گویا نامیدند:

- زیر ساختار «اندازه‌گیری» که پاسخی است به سوال : چقدر از یک کمیت (با توجه به واحد مشخص تعریف شده برای این کمیت) وجود دارد؟ بِر و همکاران این زیر ساختار را به عنوان صورتی دیگر از تعبیر *جزء-کل* پیشنهاد دادند؛
- زیر ساختار «نسبت» که ارتباط بین دو کمیت را نشان می‌دهد؛
- زیر ساختار «نرخ» که یک ارتباط بین دو کمیت را به عنوان یک کمیت جدید معرفی می‌کند. فرق این زیرساختار با زیر ساختار نسبت، بنا به گفته نویسندگان در این است که نرخ ها را می توان با هم جمع کرد ولی در نسبت ها غالبا نمی‌توان این عمل را انجام داد.
- زیرساختار « خارج قسمت » که اعداد گویا را به عنوان حاصل عمل تقسیم تعبیر می‌کند؛
- زیرساختار « مختصات خطی » که اعداد گویا را نقاطی روی محور اعداد تعبیر می‌کند. این زیر ساختار به این حقیقت اشاره دارد که اعداد گویا زیر مجموعه اعداد حقیقی هستند و همچنین توجه را به خواص مرتبط با توپولوژی متریک اعداد گویا جلب می‌کند؛
- زیرساختار « اعداد با نماد اعشاری » که بر خواص مرتبط با ارزش مکانی استوار است؛
- زیرساختار « عملگر » که اعداد گویا را به مثابه یک تبدیل در نظر می‌گیرد.

این فهرست با فهرست کیبرن (۱۹۷٦) مطابقت های زیادی داشت. مثلا زیر ساختار اعداد اعشاری در فهرست بِر و همکاران مشابه کسرهای اعشاری در فهرست کیبرن است. اما از طرفی در فهرست اخیر، در نظر گرفتن اعداد با نماد اعشاری به عنوان یک زیر مجموعه از اعدادگویا به نظر منطقی نمی‌آید. چون اعدادی وجود دارند که با نماد اعشاری نمایش داده می‌شوند ولی نمی‌توان آن‌ها را به صورت یک جفت از اعداد صحیح نمایش داد.

با الهام از فهرست کیبرن (۱۹۸۰) و توسعه آن، بِر و همکاران از میان زیرساختارهای مفهوم اعداد گویا که در بالا معرفی شد، نهایتا پنج زیرساختار *جزء-کل*، *خارج‌قسمت*، *نسبت*، *عملگر* و *اندازه* را به عنوان زیرساختارهای اصلی برای درک اعداد گویا معرفی نمودند و مدل نظری خود را بر پایه آن بنا نهادند. در این مدل، زیرساختار جز-کل، ساختار اساسی برای توسعه مفهوم اعدادگویا و همچنین نقطه شروع آموزش سایر زیرساختارها به شمار می‌آید. ارتباط مفهومی اولیه، بین زیر ساختارهای اعداد گویا در تصویر ٦ نمایش داده شده است.



تصویر ٦. طرحواره مفهومی از زیر ساختارهای اعداد گویا

خطوط پیوسته در این مدل، روابط مقرر و خطوط خط چین روابط فرضی میان زیرساختارها، فرآیندها و عملیات را نشان می‌دهد. البته در این مقاله، تنها ارتباط میان زیرساختارها مد نظر است.

پژوهش‌های فرودنتال

فرودنتال (۱۹۸۳)، موافق با فهرست کیبرن (۱۹۸۰)، رویکرد متفاوتی را برای ساختار اعداد گویا معرفی کرد. او کسرها را به عنوان منبع پدیدارشناختی اعداد گویا در نظر گرفت . پدیده شناسی آموزشی، به مجموعه موقعیت‌هایی گفته می‌شود که در آن ایده‌های مهم ریاضی در پدیده‌های واقعی ظهور پیدا می‌کنند. این موقعیت‌ها، بستری برای یادگیری ریاضیات فراهم می‌کنند که در آن ایده‌های ریاضی با معنا و کاربردی هستند.

فرودنتال، سه جنبه از کسرها را که معرف نقش‌های *تقسیم کننده*، *مقایسه‌گر* و *عملگر* است معرفی کرد. در اولین جنبه، نقش کسر به عنوان یک تقسیم کننده در نظر گرفته شده است که اشاره به فعالیت‌های ملموس و ابتدایی تقسیم کردن دارد. مساوی بودن این قسمت ها ابتدا توسط چشم و یا با کنار هم قرار دادن آن‌ها سنجیده می‌شود. در مراحل پیشرفته‌تر، از روش هایی مثل تا کردن یا وزن کردن توسط دست یا ترازو انجام می‌شود. از دید فرودنتال، ملموس ترین رویکرد برای مطرح کردن مفهوم کسر، با تقسیم یک کل از طریق بریدن و یا رنگ‌آمیزی به اجزایی مساوی شروع می‌شود. در ادامه، او به جنبه دیگری که توسعه مفهوم جز کل است و کسرها را به عنوان *مقایسه‌گر کمیت‌ها* معرفی کرده اشاره می کند[۲۳]. این جنبه از کسرها، به ایده *نسبت* در فهرست تعابیر کیبرن (۱۹۸۰) اشاره دارد. سومین جنبه در دیدگاه فرودنتال ، نقش *عملگر* به همان معنایی است که کیبرن (۱۹۸۰) در فهرست خود اشاره کرده است. همان طور که مشخص است در این رویکرد، فرودنتال بیشتر به فرآیند و عمل‌ها مرتبط با کسرها اشاره می‌کند.

پژوهش‌های اولسون

اولسون (۱۹۸۷) به نقد بررسی فهرست تعابیر و زیرساختارهای قبل خود پرداخت. نقد اصلی او بیشتر بر این نکته متمرکز بود که برای تعریف و تعیین این تعابیر و زیرساختارها، از ملاک های دقیق و مشخصی استفاده نشده است. او معتقد بود در این فهرست برخی زیرساختارها از اعداد گویا موجود نیست که باید به آن اضافه شوند. مثلا برای زیرساختار *خارج قسمتی* می‌توان دو تعبیر مجزای *شراکتی و کاهشی* را در قائل شد و یا مثلا برای زیرساختار *نسبت* می‌توان دو تعبیر نسبت *داخلی* و *خارجی* را در نظر گرفت.

اولسون در پژوهش خود (۱۹۸۸) توضیح دادکه نماد « $\frac{x}{y}$ » ، متناظر با جفت معمولی <x,y> ، مشخص کننده چهار ساختار ریاضی یعنی *تابع خارج قسمتی*، *عدد گویا*، *بردار دوتایی* و نوع خاصی از *تابع مرکب* است. هر یک از این ساختارها خود مشخص کننده کاربردهای آن در موقعیت‌های مختلف هستند.

به این ترتیب ساختار *تابع خارج قسمتی* در حقیقت متناظر با $(x\div y)$، یعنی یک تابع دوتایی است که کاربردهای آن در موقعیت های متفاوت شامل ٤ طبقه می‌شود:

- *تقسیم شراکتی* که در آن x متناظر با مقداری است که بر تعداد y قسمت برابر تقسیم شده است.

---

[۲۳] به طور مثال وقتی که می‌گوییم ارتفاع صندلی یک دوم ارتفاع میز است.

- *تقسیم کاهشی* که نوعی تفریق تکراری است که در آن می‌خواهیم بدانیم چند بار یک مقدار مثل y را می توان از یک مقدار مثل x کم کنیم.
- *انقباض* که در آن یک مقدار مثل x بر حسب فاکتوری مثل y کاهش می‌یابد.
- *استخراج* که در آن مقدار x متناظر با یک کمیت دوبعدی است (مثلا مساحت مستطیل) و y یکی از بعد ها (مثلا طول مستطیل) ست و بنابراین مقدار $\frac{x}{y}$ بعد دیگر x (یعنی عرض مستطیل) است.

برای ساختار ریاضی *عدد گویا*، اولسون دو کاربرد دیگر مشخص کرد:

- *کسر* که در حقیقت معنای جز-کل آن مد نظر است.
- *اندازه‌گیری* که مرتبط با همان ایده جز-کل است ولی در آن واحد ثابت و از قبل تعیین شده است.

ساختار *بردار دوتایی* که اکثرا با نماد <x,y> نمایش داده می‌شود، بنا به گفته اولسون، چهار کاربرد را مشخص می‌کند:

- *نسبت* که مقایسه عددی دو مقدار x و y را نمایش می‌دهد.
- *کمیت جدید* که نوعی از نسبت است ولی خود معرف کمیتی جدید است. مثلا رابطه میان جرم و حجم در فیزیک که خود کمیتی با نام چگالی را معرفی می‌کند و بر خلاف نسبت‌ها، با هم جمع یا از هم کم شوند.
- *نسبت خاص* که ارتباط بین اندازه یک جز با اندازه کل را بیان می‌کند.
- *نرخ* که نسبت میان یک مقدار با بازه‌ای از زمان است.

و در آخر، ساختار *تابع مرکب* است که از نظر اولسون به کاربرد ۱۱ ، یعنی *عملگر اسکالر* منجر می‌شود. در این نوع کاربرد، کسر $\frac{x}{y}$ بر یک کمیت اثر می‌کند، ابتدا این کمیت در صورت ضرب شده و سپس بر مخرج تقسیم می‌شود.

در این فهرست اولسون تلاش کرد تعابیر کامل‌تر و با جزئیات بیشتری را برای نماد $\frac{x}{y}$ پیشنهاد دهد: معادل برخی از این تعابیر، در فهرست دیگر محققان چون کییرن (۱۹۸۰) و بِر و همکاران (۱۹۸۳) وجود دارد مثل تعبیر *عملگر*، *نسبت*، *اندازه گیری* و *جز-کل*. ولی مثلا در تعبیر *خارج قسمت*، اولسون با تفاوت قائل شدن بین تقسیم شراکتی و کاهشی، تعابیرجدیدتری را ارائه داد. همچنین، در این فهرست، به تعابیری چون نرخ، کمیت جدید، انقباض و ... اشاره شده که غالبا فراتر از مفاهیم ریاضی مطرح شده در دوره دبستان است و البته در دیگر فهرست‌ها موجود نبود.

نقدهایی بر این فهرست نیز وارد است: با این که او دامنه وسیع‌تری از معانی کاربردی را برای ساختارهای ریاضی مرتبط با نماد $\frac{x}{y}$ توسعه داد و تلاش کرد بین ساختارهای ریاضی و کاربردهای آن در دنیای واقعی ارتباط برقرار کند ولی مشخص نکرد چگونه این معانی و کاربردهای مختلف و ساختارها می‌توانند با هم مرتبط باشند و چگونه قرار است فهم اعداد گویا از طریق آن‌ها صورت گیرد.

بحث و نتیجه گیری

بسیاری از آموزشگران ریاضی بر این باورند که برای درک همه جانبه‌ای از ساختار اعداد گویا، لازم است دانش‌آموزان تجربیات متنوعی از تعابیر این اعداد کسب کنند تا به درک مفهومی و عمیق تری از این اعداد نائل شوند (کییرن، ۱۹۷۶، بِر و همکاران، ۱۹۸۳، اولسون، ۱۹۸۷). به این منظور، در فاصله زمانی ۱۹۷۶ تا ۱۹۹۳، پژوهشگران بسیاری سعی

در یافتن و ارائه زیرساختارها و تعابیر مختلف این مفهوم برآمدند که در این مقاله، به مهم ترین و تاثیرگذارترین آن‌ها در طی زمان اشاره شد. بسیاری از این پژوهش‌ها، تکمیل کننده پژوهش‌های قبلی و یا پژوهش‌های همزمان خود بودند که در دوران خود باعث ایجاد انگیزه و رقابت در حوزه توسعه مفهومی و گرایش به سمت آن در میان محققان آموزش ریاضی شدند. این پژوهش‌ها، گاها با رویکردهای متفاوت، سعی در ارائه فهرستی از تعابیر و زیرساختارهای مهم و ضروری برای درک و شفافیت مفهوم اعداد گویا داشتند ((کیبرن (۱۹۸۸، ۱۹۸۰، ۱۹۷۶)، برِو همکاران (۱۹۸۳ ،۱۹۹۳)، ، فرودنتال (۱۹۸۳)، اولسون (۱۹۸۷)). در این مقاله علاوه بر شرح و نقد هر یک از این تعابیر، شباهت ها تفاوت‌های بین فهرست‌های متفاوت هم مورد بررسی و تحلیل قرار گرفت.

میان این فهرست‌ها و پس از گذشت حدود سه دهه، تعابیر ارائه شده توسط کیبرن (۱۹۸۰) که شامل: جز-کل، نسبت، خارج قسمت، اندازه گیری و عملگر است، همچنان از عمومیت، محبوبیت و اقبال بیشتری میان آموزشگران ریاضی برخوردار است. کیبرن (۱۹۸۰) ادعا کرد که میان تعابیر فراوانی که از اعداد گویا موجود است، این پنج تعبیر، مهم‌ترین و اساسی ترین آن‌ها برای یادگیری و یاددهی مفهوم اعداد گویا است. یکی از دلایل مقبولیت این فهرست شاید این باشد که تحلیل مفهومی اعداد گویا و بلاخص کسرها، بیشتر در در دوره ابتدایی و نهایتا دوره اول متوسطه مطرح شده و بنابراین پژوهش‌ها تمرکز بیشتری بر این دوره‌ها دارند. لذا دیگر فهرست‌ها با وجود جزئیات بیشتر، کاربرد کمتری در این نوع مطالعات دارند. مسلما تحلیل مبسوط اولسون (۱۹۸۷)، در پژوهش‌هایی مربوط به دوره های بالاتر از ابتدایی، و یا پژوهش‌هایی که مرتبط با *مدل سازی* و یا استاندار فرآیندی *اتصال و پیوند* بین علم ریاضی و فیزیک است می‌تواند کاربرد موثرتری داشته باشد. بنابراین با توجه به ماهیت پژوهش و همچنین مقطع آموزشی و تحصیلی خاصی که یاددهی و یادگیری مفهوم اعداد گویا در آن صورت می‌گیرد، انتخاب هر یک از این فهرست‌ها میسر است.

تعبیرهای ارائه شده در همه این فهرست‌ها، چه در فهرست تعابیر کیبرن (۱۹۸۰) (*اندازه‌گیری، خارج قسمت، نسبت، عملگر و جزءکل*) و چه در دیگر فهرست‌ها، بسته به نوع و جای استفاده، همگی مهم و کاربردی هستند. نقش حیاتی و بی بدیل تعبیر جز-کل، در میان همه تعابیر پیشنهاد شده غیر قابل انکار است و همان طور که کیبرن (۱۹۸۸) توضیح می‌دهد، بقیه تعابیر به نوعی مشخصه ضمنی رابطه *جزء کل* را در بر دارند. ارتباط میان زیرساختار جز کل و دیگر زیرساختارها، در مدل تئوری ارائه شده توسط بر و همکاران (۱۹۸۳) نیز به خوبی نمایش داده شده است (تصویر ٦). این مدل، توسط محققان (باتورو[٢٤]، ٢٠٠٤، کیبرن، ۱۹۹۵، مارشال[٢٥]، ۱۹۹۳، کاارالامبوز[٢٦] و پنتازی، ۲۰۰۷)، ریحانی و همکاران، ۱۳۹۳) مورد آزمایش تجربی قرار گرفت که در آن بر اعتبار روابط میان زیر ساختارهای اعداد گویا با زیرساختار جز کل صحه گذاشته شد و نشان داد که این زیرساختار، برای توسعه درک چهار ساختار دیگر، اساسی است. این نتایج، رویکرد آموزشی سنتی را در استفاده از مفهوم جز کل، به عنوان شروعی در آموزش کسرها و همچنین سهم عمده‌ای از مثال‌ها و موقعیت‌ها در آموزش کسرها توجیه می‌کند (باتورو، ٢٠٠٤ ، لامون، ۲۰۰۱). در کتاب‌های درسی و منابع آموزشی، زیر ساختار *جز کل* غالبا با واژه «کسر» معرفی شده و توسعه مفهومی اعداد گویا با آن آغاز

[24] Baturo
[25] Marshall
[26] Charalambous & Pantazi

می‌شود. همان طور که اشاره شد، این زیر ساختار از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و به طور گسترده‌ای در کتاب‌های درسی مورد استفاده قرار می‌گیرد. البته این مسئله نباید نباید منجر به کم اهمیت شماردن دیگر زیرساختارها و نادیده گرفتن آن‌ها شود. محققان بر این باورند که هرچند استفاده از زیرساختار جز کل یکی از بهترین روش‌ها برای آموزش کسر است، لیکن برای فهم همه جانبه‌ی کسر باید از زیرساختارهای دیگر و مزایای هر یک بهره برد. بنا به نتایج این مطالعات، یکپارچگی و تلفیق این زیرساختارها همگی در کنار هم، به درک همه جانبه و مفهومی اعداد گویا منجر می‌شود (کییرن ،۱۹۹۳، بر و همکاران ۱۹۹۲ ،کاارالامبوز[۲۷] و پنتازی، ۲۰۰۷)، ریحانی و همکاران، ۱۳۹۳). بنابراین با توجه به موضوع مورد بحث و پژوهش، با تسلط و اشراف کامل به تعاریف و تعابیر دقیق اعداد گویا، باید به انتخاب آن ها، اقدام کرد. در برخی از موارد، تنها با تمرکز بر چند تعبیر و در مواردی دیگر، با انتخاب و استفاده از کل تعابیر و زیرساختارهای یک فهرست، به موضوع مورد بحث پرداخت.

منابع

ریحانی، ابراهیم، بخشعلی زاده، شهرناز، دوستی، ملیحه (۱۳۹۳). درک مفهوم کسر توسط دانش‌آموزان پایه ششم دوره ابتدایی. *فصلنامه مطالعات برنامه درسی*، دوره: ۹، شماره: ۳٤.

Baturo, A. R. (2004). Empowering Andrea to help year-5 students construct fraction understanding. In M. J. Høines & A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME Conference, 2* (pp.95-102), Bergen: Bergen University College.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T.R. et Silver, E.A. (1983). Rational-number concept. Dans R. Lesh et M. Landau (dir.), *Acquisition of mathematics concepts and process* (p. 91-126). New York : Academic Press.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. et Lesh, R. (1992). Rational-number, ratio, and proportion. Dans D. A. Grouws (dir.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 296 – 333). Don Mills, ON: Maxwell Macmillan.

Behr, M., Harel, G, Post,T. R., et Lesh, R. (1993). Rational Numbers: Toward a Semantic Analyse- Emphasis on the Operator Construct. Dans T.P. Carpenter,E. Fennema, T.A. Romberg (Eds.), *Rational numbers : An integration of recherch* (pp. 327-362). Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum Associates Inc.

Brousseau, G., Brousseau, N., and Warfield, V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 1: Rationals as measurements, *Journal of Mathematical Behavior* 23, 1–20.

Charalambous, C. Y., and Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *64*, 293-316.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Boston : D. Reidel.

Hart, K. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11 – 16*. London : Murray.

Kaput, J. (1985). *Multiplicative word problems and intensive quantities: An integrated software response* (Tech. Rep. No. 8519). Cambridge, MA: Harvard.

Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. Dans R. Lesh (Ed.), *Number and measurement : Papers from a research workshop* (p. 101 – 144). Columbus, OH : ERIC/SMEAC.

[27] Charalambous & Pantazi

Kieren, T. (1980). The rational number construct - Its elements and mechanisms. Dans Kieren (Ed.), *Recent research on number learning* (p. 125-150). Columbus : ERIC/SMEAC.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. Dans J. Hiebert et M. Behr (Eds), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (p. 53 – 92). Reston: NCTM.

Kieren, T. (1993). 'Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding', in T.P. Carpenter, E. Fennema and T.A. Romberg (eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research*, Lawrence Erlbaum Associates, NJ, pp. 49–84.

Lamon, S. J. (2006). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. L. (2001). Presenting and Representing: From Fractions to Rational Numbers. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The Roles Of Representations in School Mathematics-2001 Yearbook* (pp. 146-165). Reston: NCTM.

Lamon, S. J. (1999). Teaching Fractions and Ratios for Understanding. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Mack, N. (1990). Learning Fraction with Understanding: Building on Informational Knowledge. *Journal for Research for Mathematics Education*, 21(1), 16-32.

Mack, N. (1995). Learning Rational Number with Understanding: the case of Informal Knowledge, *Rational Numbers: An Integration of Research*, p.85-105. Hillsadale : Lawrence Erlbaum Associates

Marshall, S. P. (1993). Assessment of Rational Number Understanding: A Schema-Based Approach. In T.P. Carpenter, E. Fennema, & T.A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers:An Integration of Research*, (pp. 261-288). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Ohlsson, S. (1987). Sense and reference in the design of interactive illustrations for rational numbers. Dans R.W. Lawler et M. Yazdani (Eds.), *Artificial intelligence and education* (p. 307 – 344). Norwood, NJ : Ablex.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical Meaning and Applicational Meaning in the Semantics of Fractions and related Concepts. Dans J. Hiebert et M. Behr (Eds), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (p. 53 – 92). Reston : NCTM.

Pirie, S.E.B. (1988). Understanding : Instrumental, relational, intuitive, constructed, formalized, …? How we know? *For the Learning of Mathematics*, 8(3), 2 – 6.

Resnick, L. B. (1986). The development of mathematical intuition: Dans M. Perlmutter (Ed.), *Perspective on intellectual development: The Minnesota Symposia on Child Psychology* (vol. 19, p. 159-194). Hilsdale, NJ: Lawrence Elbraum Associates Inc.

Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (pp. 41–52). Reston: Lawrence Erlbaum.

Streefland, L. (1991). Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research. Dordrecht: Kluwer.

Streefland, L. (1993). Fractions: A Realistic Approach. Dans T.P. Carpenter,E. Fennema, T.A. Romberg (Eds.), *Rational numbers : An integration of recherché* (p. 289-325). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Inc.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. Dans R. Lesh et M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and process* (p. 127 - 174). New York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. Dans J. Hiebert et M. Behr (Eds), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (p. 141 – 161). Reston: NCTM.